المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2009
الموضوع

الصفحة 1/4

C:NS24

المعامل:	9	المادة:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	4	الشعب(ة) أو المسلك:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. لتكن F مجموعة

المصفوفات $M(x,y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

0,25 — 1- أ) بين أن F جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

1 — ب) بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية.

2- لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من F حيث $x\in\mathbb{R}^*$

0,5 — بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

3- نيكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي:

$$\forall(x,y)\in E\ ;\ \forall(a,b)\in E\qquad (x,y)\perp(a,b)=\left(xa,\ xb+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi:(F,\times)&\to(E,\perp)\\ M(x,y)&\to\varphi(M(x,y))=(x,y)\end{aligned}$$

0,25 — أ) احسب $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$

0,5 — ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,5 — ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني:(4 نقط)

m عدد عقدي يخالف 1 .

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(E) : z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

0,25 | 1-أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$

0,25 | ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

0,5 | ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1 .

1 | 2- نضع: $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

II. المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي m و $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

0,5 | 1- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية

0,5 | 2-أ) بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z'=1-iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

0,5 | ب) بين أن العدد العقدي $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$

($\mathrm{Re}(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\mathrm{Im}(m)$ هو جزؤه التخيلي)

0,5 | ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة.

التمرين الثالث:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $a_n=2^n+3^n+6^n-1$

0,25 | 1- أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$

0,5 | ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n\equiv 0[3]$

2- ليكن p عددا أوليا بحيث $p>3$

0,75 | أ) بين أن $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و $6^{p-1}\equiv 1[p]$

0,75 | ب) بين أن p يقسم a_{p-2}

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n 0,75

بحيث: $a_n \wedge q = q$ ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)

مسألة:(10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ من أجل $x>0$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>الجزء الأول</u>

1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x=t^n$) 0, 5

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 0,25

ج) حدد النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ 1

2- أ) ادرس تغيرات الدالة f_1 0,5

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2 0,5

3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) 0,25

ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) .(نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2)) 0,5

(نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

<u>الجزء الثاني</u>

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و أن : $F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $(\forall x<0)$ 0,5

ب) استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0[$ 0,25

2- أ) بين أن: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$ $(\forall x<0)$ 0,25

ب) تحقق أن الدالة $x \to x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$ 0,25

ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$ 0,25

3- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8} \le \ell \le \frac{3}{4}$	0,25
الجزء الثالث	
لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$	
1- أ) بين أن : $u_n \ge 0$ $(\forall n \ge 1)$	0,5
ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1,e]$	0,5
ج) بين أن: $u_{n+1} \le u_n$ $(\forall n \ge 1)$	0,25
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة	0,25
2- أ) بين أن: $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$ $(\forall n \ge 1)$	0,5
ب) استنتج بالسنتمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$	0,5
3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$ $(\forall n \ge 2)$ (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و1- ج) و 2- أ))	0,75
ب) حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} nu_n$	0,5
4- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .	
نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي: $v_1 = a$ و $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ $(\forall n \ge 1)$	
و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $d_n = \lvert v_n - u_n \rvert$	
أ) بين أن: $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ $(\forall n \ge 1)$	0,25
ب) بين أن: $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$	0,5
ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة .	0,25

التمـــــرين الاول : البِنيـــات الجَبريــــة

لتكن F المجمُوعة : $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

1 ـ أ) لنبين ان F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من F لدينَا

$$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} = M(xa, xb + \frac{y}{a})$$

و منه F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب) لنبين أَن $(F, \times)$ زُمرة غير تبادلية

(1) بمَا أَن F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ و $\times$ تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ فإِن $\times$ تجميعي في F

(2) لدينَا $I = M(1,0) \in F$ العنصر المحايد في F بالنسبة ل $\times$ في F

(3) كل عنصر $M(x,y)$ من F يقبل $M(\frac{1}{x}, -y)$ مُماثل له بالنسبة ل $\times$ في F

(4) $\times$ غير تبادلي في F , لدينَا مثَال مُضَاذ :

$$M(1,1) \times M(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

و $M(2,3) \times M(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

و منه $M(1,1) \times M(2,3) \neq M(2,3) \times M(1,1)$

2 ـ لتكن $G = \{M(x,0) \in F / x \in \mathbb{R}^*\}$ لنبين أَن G زُمرة جُزئِية من $(F, \times)$

(1) لدينَا $G \neq \varnothing$ لأَن $I \in G$

(2) ليكن x و a من $\mathbb{R}^*$ لدينَا : $M(x,0) \times M(a,0)^{-1} = M(x,0) \times M(\frac{1}{a}, 0) = M(\frac{x}{a}, 0)$

3 ـ ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$

نزُود E بقانُون التركيب الداخلي $\perp$ $\forall (x,y) \in E, \forall (a,b) \in E : (x,y) \perp (a,b) = (xa, xb + \frac{y}{a})$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rcl} \phi : (F, \times) & \mapsto & (E, \perp) \\ M(x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array}$

أ) $(2,3) \perp (1,1) = (2,5)$ و $(1,1) \perp (2,3) = (2, \frac{7}{2})$

ب) (1) لنبين ان ϕ تشاكل : لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ عنصرين من F; لدينَا

$\phi(M(x,y) \times M(a,b)) = \phi(M(xa, xb + \frac{y}{a}))$: حسب الجواب 1) أ)

ولدينَا كذلك من جهة ثانية

$\phi(M(xa, xb + \frac{y}{a})) = (xa, xb + \frac{y}{a}) = (x,y) \perp (a,b) = \phi(M(x,y) \perp \phi(M(a,b))$: ومنه

$\phi(M(x,y) \times M(a,b)) = \phi(M(x,y) \perp \phi(M(a,b))$

مُحَمّد السّهرُوردِي

(2) لنبين ان ϕ تقابل :

كل زوج (x,y) من E يحدِد مصفُوفة وحيدة $M(x,y)$ من F بحيثُ $\phi(M(x,y)) = (x,y)$

ج) من السُؤال السابق نستنتجُ ان $(E,\perp)$ و $(F,\times)$ لهمَا نفس البنية الجبرِية , إِذن $(E,\perp)$ زُمرة غير تبادلية

.

التمـــــــرين الثاني : الأَعـــــداد العقديـــــة

m عدَدُ عقديٌ بحيث $m \neq 1$

I– نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 - (1-i)(1+m)z - i(m^2+1) = 0$:

1– أَ)لنتحقَق من أَن $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

لدينَا $\Delta = [(1-i)(1+m)]^2 + 4i(m^2+1)$

بمَاأَن $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$ فإِن

$$\Delta = 2i(m^2-2m+1) = (1+i)^2(m-1)^2 = [(1+i)(m-1)]^2$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

E تقبل حلين همَا : $z_1 = \dfrac{(1-i)(1+m)-(1+i)(m-1)}{2} = 1-im$ و

$$z_2 = \frac{(1-i)(1+m)+(1+i)(m-1)}{2} = m-i$$

ج) $z_1z_2 = 1 \Leftrightarrow (1-im)(m-i) = 1 \Leftrightarrow -i(m^2+1) = 1$

$$\Leftrightarrow m^2+1 = i \Leftrightarrow m^2 = -1+i$$

نضع $m = x+iy$ المتساوية $m^2 = -1+i$ تصبح تكافيء النظمة (S) التالية :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

بمَاأَن x و y لهمَا نفس الِاشارة فإِن

$$m = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ أَو } m = -[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}]$$

2– في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, لدينَا :

$$z_1 = 1 - im = 1 + e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}(e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}) = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$ و

بمَاأَن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإِن $0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ ومنه

$$z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\left(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)$$

و بمَاأَن $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ فإن $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$ ومنه

$$z_2=2e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})}\ cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=2\ cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\left(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})\right)$$

II نعتبر النقط $M(m)$, $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

1 تكُون النقط M_2,M_1,M مستقمية إذَا وفقط إِذَا كان $\frac{z_1-m}{z_2-m}\in\mathbb{R}$ أَي $\frac{1-im-m}{-i}\in\mathbb{R}$ أَي $i+m-im\in\mathbb{R}$

نضع $m=x+iy$ مع $(x,y\in\mathbb{R},(x,y)\neq(1,0))$ ومنه مجمُوعة النقط M بحيث M_2,M_1,M مستقمية هي التي تحقِق $i+x+iy-i(x+iy)\in\mathbb{R}$ اي $1+y-x=0$ اي مستقيم معَادلته $1+y-x=0$ محروم من النقطة $A(1,0)$

2- أ) لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z'=1-iz$

لدينَا التحويل R يقبل نقطة صامدة لحقهَا ω يحقِق $\omega=1-i\omega\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ ومنه $z'=1-iz\Leftrightarrow z'-\omega=-i(z-\omega)$ و منه $\forall z\in\mathbb{C},z\neq\omega,\frac{z'-\omega}{z-\omega}=-i.$

لتكن Ω النقطة ذات الّلحِق $\omega=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ نستنتج ان $\Omega M'=\Omega M.$ $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ إِدن R دوران مركزه Ω و قياس زاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب) نضع $m=x+iy,$

$$\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in I\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{m-i-1+im}{m-i-m}\in I\mathbb{R}\Leftrightarrow i(x+iy-i-1+ix-y)\in I\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -y+1-x=0\Leftrightarrow Re(m)+Im(m)=1$$

ج) لدينَا $z_1=1-im\Rightarrow R(M)=M_1$ ومنه المثلث ΩMM_1 قائِم الزاوية في Ω ومنه توجد دائِرة (C) وحيدة تمر من M,M_1 و Ω بحيث $[MM_1]$ قطر فيهَا، و هي الدائِرة المحيُطة بِالمثلث ΩMM_1 .
و منه تكون النقط Ω,M,M_1 و M_2 متداورة يكافيءِ $M_2\in(C)$ يكافيءِ M_2MM_1 قائِم الزاوية في M_2 يكافيءِ $\overline{\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2M_1}\right)}\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ يكافيءِ $arg(\frac{z_2-z_1}{z_2-m})\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يكافيءِ $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in I\mathbb{R}$ يكافيءِ حسبَ السُؤال السابق $Re(m)+Im(m)=1$

إِذن مجموعة النقط $M(m)$ اَلتي تحقِق Ω,M,M_1 و M_2 متداورة هي المستَقيم الذي معادلته $x+y-1=0$: محروم من النقطة $A(1,0)$

.

التمــــــرين الثالث : الحـــسابـــــــيات

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضـــع : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$

1 أَ) لنتحـــقـــق من انه لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي

$$2\equiv0[2]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,2^n\equiv0[2]$$
$$3\equiv1[2]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,3^n\equiv1[2]$$

$6 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[2]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[2]$

إِذن لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي

ب) لنُحَدِد قيم n التي يكون من اجلها $a_n \equiv 0[3]$ $2 \equiv -1[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv (-1)^n[3]$

$3 \equiv 0[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 0[3]$

$6 \equiv 0[0] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[3]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0[3]$ إِذَا وفقط إِذَا كان n عدَد زوجي

2– ليكن p عدَدَا أَوليَا بحيث $p > 3$

أَ) بمَا أَن $p > 3$ و p أَولي فإِن $p \barwedge 2 = p \barwedge 3 = 1$ و $p \barwedge 6 = 1$ فإِنه حسَبَ مبرهَنة $(Fermat)$
$2^{p-1} \equiv 1[p], 3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$

بلدينَا $6a_{p-2} = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ من السُؤال السابق نستنتج ان
$6a_{p-2} = 32^{p-1} + 23^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0[p]$

ومنه $p/6a_{p-2}$ و بمَا أَن $p \barwedge 6 = 1$ فإِن حسبَ مبرهَنة $(GAUSS)$ p/a_{p-2}

ج) ليكن q عدَدَا أَوليَا

الحالة I : $q = 2$ من السُؤال 1– أَ) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_k$ و $a_k \barwedge q = q$ ومنه $n = k$

الحالة II : $q = 3$ من السُؤال 1– ب) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_{2k}$ و $a_{2k} \barwedge q = q$ ومنه $n = 2k$

الحالة III : $q > 3$ من السُؤال 2– ب) q/a_{q-2} و $a_{q-2} \barwedge q = q$ ومنه $n = q - 2$

.

مسأَلة : التحـــليـــــل

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة $f_n : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ المعرفة بمَا يلي $f_n(x) = x(1 - ln(x))^n$: إِذَا كان $x > 0$ و $f_n(0) = 0$

(C_n) منحناهَا في مَعلم مُتعامد مُمنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجُزء الاوَل

1– أَ) إِتصال f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنبين ان $f_n(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$

بوضع $t^n = x$ نحصل عَلَى

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} t^n(1 - nln(t))^n = \lim\limits_{t \to 0^+} (t - ntln(t))^n = 0 = f_n(0)$ لأَن $\lim\limits_{t \to 0^+} tln(t) = 0$

مُحَمّد السّهرُوردِي

ب) قابليّة اشتِقاق f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنحسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}$

لدينَا $\lim_{x\to 0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(1-ln(x))^n=+\infty$ لأَنّ $\lim_{t\to 0^+}-ln(t)=+\infty$ إِذن f_n غير قابلة لِلإِشتِقاق عَلَى اليمين في الصفر

ج) $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}x(1-ln(x))=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-ln(x))=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f_2(x)=\lim_{x\to+\infty}x(1-ln(x))^2=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-ln(x))^2=+\infty$

2– أَ) تغيرات f_1

لدينَا f_1 قابلة لِلإِشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و $\forall x>0, f_1'(x)=1-ln(x)-1=-ln(x)$

جدول تغيرات f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2– ب) تغيرات f_2

لدينَا f_2 قابلة لِلإِشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و

$\forall x>0, f_2'(x)=(1-ln(x))^2-2x\frac{1}{x}(1-ln(x))=(ln(x)-1)(1+ln(x))$

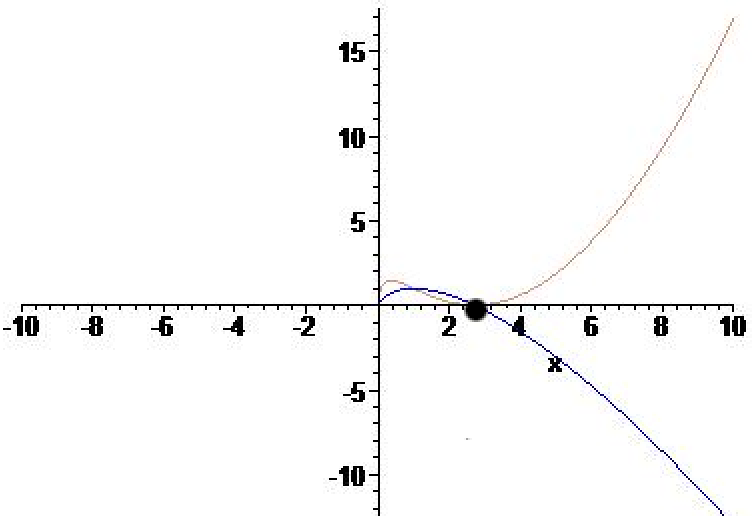
x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3– أَ) دراسة الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f_1(x)-f_2(x)=x(1-ln(x)(1-1+ln(x))=xln(x)(1-ln(x))$

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1(x)-f_2(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C_1 فوق C_2		C_2 فوق C_1		C_1 فوق C_2	

C1



مُحَمّد السّهرُوردي

اَلجُزء الثاني

1- نعتبر الدالة F بحيثُ : $\forall x \leq 0, F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

أَ) اَلدالة $t :\mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ مُتصلة علَى $[0, +\infty[$ و الدالة $u : x \mapsto e^x$ قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty, 0]$ و $u(]-\infty, 0]) \subset [0, +\infty[$ و منه F قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty, 0]$ و ان

$$\forall x < 0, F'(x) = -e^x\frac{(f(e^x))}{1+e^{2x}} = -\frac{e^x e^x(1 - ln(e^x))}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}$$

ب) F تناقصية علَى $]-\infty, 0]$

2- أَ) ليكن x من $]-\infty, 0]$ لدينَا $\forall t \in [e^x, 1], 2 \geq 1 + t^2 \geq 1 + e^{2x}$ و $0 \leq f_1(t)$ ومنه

$$\forall t \in [e^x, 1], \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{1}{1+t^2}f_1(t) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$$ و منه

$$\int_{e^x}^{1} \frac{1}{2}f_1(t)dt \leq \int_{e^x}^{1} \frac{1}{1+t^2}f_1(t)dt \leq \int_{e^x}^{1} \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)dt$$ آي

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$$

2- ب) لكل x من $]-\infty, 0]$ لدينَا $\left(x^2(\frac{3}{4} - \frac{ln(x)}{2})\right)' = f_1(x)$

ج) $\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \left[t^2(\frac{3}{4} - \frac{ln(t)}{2})\right]_{e^x}^{1} = \frac{3}{4} - e^{2x}(\frac{3}{4} - \frac{x}{2})$ و بمَا أَن $\lim_{x \to -\infty} e^{2x}(\frac{3}{4} - \frac{x}{2}) = 0$ فإِن

$$\lim_{x \to -\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \frac{3}{4}$$

3- من السُؤال 2- ب) نستنتج ان $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

اَلجُزء الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n = \int_{1}^{e} f_n(t)dt$

1- أَ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينَا $\forall x \in [1, e], f_n(x) \geq 0$ ومنه $u_n = \int_{1}^{e} f_n(t)dt \geq 0$

ب) ليكن x من $[1, e]$ لدينَا

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(1 - ln(x))^n(1 - ln(x) - 1) = -xln(x)(1 - ln(x))^n$$ و لدينَا

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq ln(x) \\ 0 \leq 1 - ln(x) \\ 0 \leq (1 - ln(x))^n \end{cases}$$

ومنه $\forall x \in [1, e], f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

ج)ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ من السُؤَال السابق بمكاملة المتفاوتة $f_{n+1} - f_n \leq 0$ عَلَى $[1, e]$ نحصل عَلَى $u_{n+1} \leq u_n$

د) (u_n) مصغورة بالصفر حسب (1- أَ)) و تناقصية حسب (1- ج))

مُحَمّد السّهرُوردِي

2- أَ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $u'(x) = x, \quad v(x) = (1 - ln(x))^{n+1}$

$u(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v'(x) = -(n+1)\frac{(1-ln(x))^n}{x}$

ومنه $u_{n+1} = \int_1^e x(1-ln(x))^n dx = \left[\frac{x^2}{2}(1-ln(x))^{n+1}\right]_1^e + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1-lnx)^n dx$

$\forall n \geq 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

ب) لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين C_1 و C_2 و المستقيمين الذين معادلتيهمَا علَى التوالِي $x = 1$ و $x = e$ بالسنتمتر .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)| dx \times 4cm^2 = u_1 - u_2 \times 4cm^2$$

ولدينَا حسبَ (2- أَ)) $u_1 - u_2 = \frac{1}{2}$ ومنه $\mathcal{A} = 2cm^2$

3- أَ) لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $u_n - \frac{1}{n+1} = (n+1)u_n - 1 = 2u_{n+1}$ وبمَا أَن حسب (1- أَ)) $u_{n+1} \geq 0$ فإِن $u_n - \frac{1}{n+1} \geq 0$ إِذن $u_n \geq \frac{1}{n+1}$

ولدينَا لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $2u_{n+1} + 1 = (n+1)u_n$ و بمَا أَن (u_n) تناقصية فإِن $2u_{n+1} + 1 \leq 2u_n + 1$ ومنه $(n+1)u_n \leq 2u_n + 1$ ومنه $u_n \leq \frac{1}{n-1}$ وبالتالي

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1, \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

4- $a \in \mathbb{R}$ بحيث $a \neq u_1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n, v_1 = a;$ و $\forall n \geq 1, d_n = |v_n - u_n|$

أَ) لنبين بالترجع أَنَ $\forall n \geq 1, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$

لدينَا من آجل $n = 1$: $d_1 = d_1$

ليكن $n \geq 1$ نَفترِض أَنَ $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ لدينَا

$$d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = \frac{(n+1)}{2}|v_n - u_n| = \frac{(n+1)}{2}d_n = \frac{(n+1)!}{2^n}d_1$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج أَن $\forall n \geq 1 : \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2}$ ومنه $\forall n \geq 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq 2 \Rightarrow, \frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2$ وبالترجع نحصل عَلَى $d_n \geq 2^{(n-3)}d_3$ وبماأَن $\lim_{n \to +\infty} 2^{(n-3)}d_3 = +\infty$ فإِنَ $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

ج) إِذَ كانت (v_n) متقاربة و علمَا أَنَ (u_n) متقاربة و $d_n = |v_n - u_n|$ فإِنَ (d_n) ستَكونُ مُتقاربة و هذَا تنَاقضُ