النهايات و الاتصال

I- النهاية المنتهية

1- النهاية ا عند x_0

أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتين f و g حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا f

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 / \quad f(]-\alpha;\alpha[-\{0\}) \subset]-\varepsilon;\varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

2- 2- أ) مثل مبيانيا g

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 / \quad g(]-\alpha;\alpha[-\{0\}) \subset]-\varepsilon;\varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

x	$f(x)$	$g(x)$
-10^{-2}		
-10^{-5}		
-10^{-100}		
0	////////////////////	/////////////////////
10^{-100}		
10^{-5}		
10^{-2}		

ملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان x يؤول إلى 0 فان $f(x)$ يؤول إلى 0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

نفس الملاحظة على الدالة g

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 \prec |x| \prec \alpha \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$$

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

ملاحظة

* $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |f(x)|=0$

* إذا كانت f و g منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه0 و $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ فان $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

خاصية

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{x \to 0} ax^n = 0 \qquad \lim_{x \to 0} a\sqrt{x} = 0$$

خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه 0 بحيث $\left|f(x)\right| \le u(x) \quad \forall x \in I$ و كان $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ فان

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

البرهان

ليكن $\beta \succ 0$ و $I = \left]-\beta;\beta\right[- \{0\}$

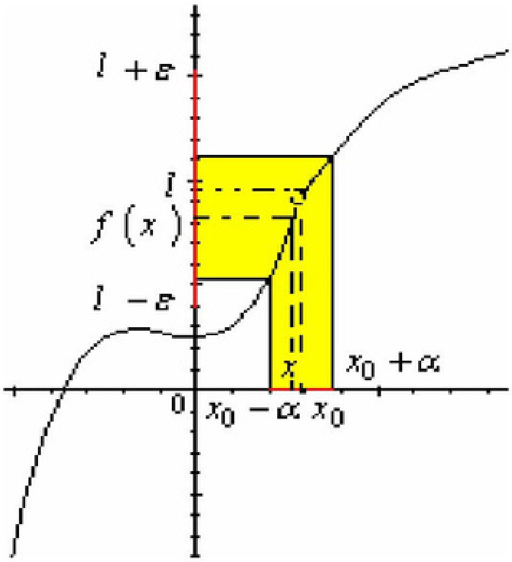
لدينا $\left|f(x)\right| \le u(x) \quad \forall x \in \left]-\beta;\beta\right[- \{0\}$

و حيث أن $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ فان $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 \prec |x| \prec \alpha \Rightarrow |u(x)| \prec \varepsilon$

نعتبر $\lambda = \inf(\alpha;\beta)$ $\quad \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \lambda \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 \prec |x| \prec \lambda \Rightarrow \begin{cases} |u(x)| \prec \varepsilon \\ |f(x)| \le u(x) \end{cases}$

و بالتالي $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \lambda \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 \prec |x| \prec \lambda \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



تمرين

بين أن $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x+1} = 0$

ب- النهاية l عند x_0

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

حدسيا: $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى x_0

عندما يقترب x من x_0 أي عندما تقترب h من 0

حيث $h = x - x_0$ فان $f(x) - l$ تقترب من 0

أي $f(x_0+h) - l$ تقترب من 0

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $h \to f(x_0+h) - l$ هي0

عندما يؤول h إلى 0

نكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

ملاحظة

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = l$

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - l = 0$

* إذا كانت لدالة نهاية عند x_0 فان هذه النهاية وحيدة

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - l = 0$

* $\lim\limits_{x \to x_0} a(x-x_0)^n = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

تمرين بين أن $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x-1}{x-3} = 9$

وبالتالي $\left|P(x)-P(x_0)\right| \le k\left|x-x_0\right|$

و حبث أن $\lim_{x\to x_0} k\left|x-x_0\right| = 0$ فان $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

إذن P متصلة في x_0

ج- تطبيقات على حساب النهايات

حدد $\lim_{x\to -1} 3x^2+4x-2$; $\lim_{x\to 2}\left|x^2-7x-2\right|$; $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x-5}$

د- تمديد بالاتصال

الدالة $f: x \to \frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة في 1

ولدينا $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x)=\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ g(1)=2 \end{cases}$ تنطبق على f في $\mathbb{R}-\{1\}$ ومتصلة في 1

نقول ان g تمديد بالاتصال لدالة f في 1

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x)=f(x) & x\in D_f \\ g(x_0)=l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f في x_0

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين

$\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+2x-8}{x+2} \\ x_0=-2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} f(x)=x\sin\frac{1}{x^2} \\ x_0=0 \end{cases}$

3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ (أنشئ C_f)

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]1;+\infty[$ ينطبق مع قصور الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x+2 = 3$

نقول ان نهاية f هي 3 عل يمين 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=3$

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]-\infty;1[$ ينطبق مع قصور الدالة h حيث $h(x)=-x-2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} -x-2 = -3$

نقول ان نهاية f هي 3- على يسار 1

خاصية

اذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه x_0 بحيث $\left|f(x)-l\right| \leq u(x)$ $\forall x \in I$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$

فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

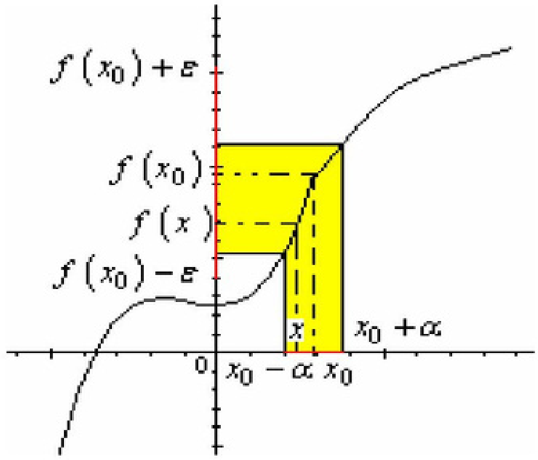
تمرين

بين أن $\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2\cos\frac{1}{x}=2$

خاصية

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} \left|f(x)\right|=\left|l\right|$

2- اتصال دالة



أ- تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0
تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

أمثلة

الدوال $x\to ax^n$ متصلة في 0 $\left(n\in\mathbb{N}^* \quad a\in\mathbb{R}\right)$

الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها

الدالة $x\to\sqrt{|x|}$ متصلة في 0

اصطلاح

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و كانت غير متصلة في x_0 فإننا نقول إن f متقطعة في x_0

تمرين

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ f(1)=2 & \end{cases}$$

أدرس اتصال f في1

ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$

البرهان

لتكن P دالة حدودية و x_0 عنصر من $\mathbb{R}$

نعلم أنه توجد حدودية Q حيث $P(x)-P(x_0)=(x-x_0)Q(x)$

نفترض أن

$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.......+a_1x+a_0$ $\left|Q(x)\right|\leq\left|a_n\right|\left|x^n\right|+\left|a_{n-1}\right|\left|x^{n-1}\right|+.......+\left|a_1\right|\left|x\right|+\left|a_0\right|$

ليكن M أكبر الأعداد $\left|a_i\right|$ حيث $i\in\{0;1...;n\}$ ومنه $\left|Q(x)\right|\leq M(\left|x^n\right|+\left|x^{n-1}\right|+.......+\left|x\right|+1)$

نفترض أن $x_0-1\prec x\prec x_0+1$ و $\alpha=\sup\left(\left|x_0-1\right|;\left|x_0+1\right|\right)$ ومنه $\left|x\right|\prec\alpha$

و بالتالي $\left|Q(x)\right|\leq M(\alpha^n+\alpha^{n-1}+....+\alpha+1)$

نضع $k=M(\alpha^n+\alpha^{n-1}+....+\alpha+1)$ ومنه $\left|x-x_0\right|\left|Q(x)\right|\leq k\left|x-x_0\right|$

و نكتب $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=-3$

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقو ل ان f تقبل النهاية l على يمين x_0 إذا كان قصورها على $]x_0;x_0+a[$ حيث $a\succ 0$ ينطبق مع قصور

دالة معرفة على مجال مفتوح منقط منقط مركزه x_0 تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$

أو $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}} f(x)=l$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

خاصية

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2|x|}{x} \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+4x+4 & x\succ -2 \\ f(x)=2x^2+2x & x\le -2 \\ x_0=-2 \end{cases}$$

نتائج

تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان تكون f متصلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0

تمرين

1- حدد a لكي تكون f متصلة في -1

$$\begin{cases} f(x)=x^3+ax & x\succ -1 \\ f(x)=-x+1 & x\le -1 \end{cases}$$

2- أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & x\succ 2 \\ f(x)=x^2-1 & x\le 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0=2$$

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} & x\succ 0 \\ f(x)=x^2-x & x\le 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

4- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة معرفة على $[a;b]$

تكون f متصلة على $]a;b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$

تكون f متصلة على $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ ومتصلة على يمين a و متصلة على يسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $[a;b[$ و على $]a;b]$

ملاحظة

التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(a;f(a))$ و $(b;f(b))$

II- النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x}$

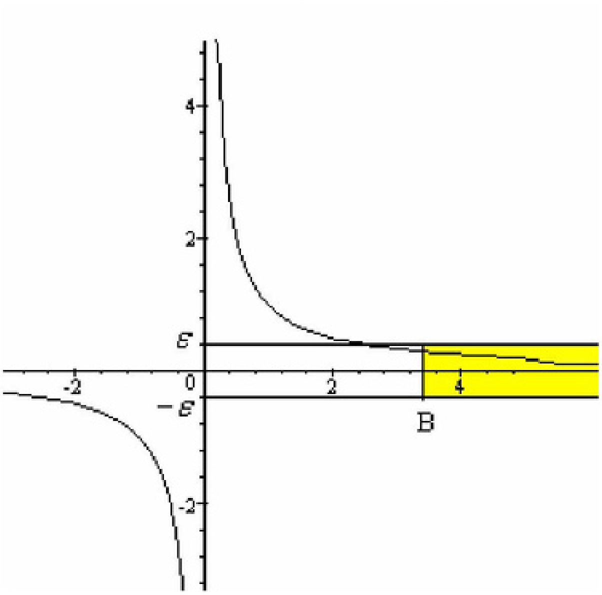
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

x	10^{100}	$10^{10^{9}}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$				

3- بين أن

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad f(]B;+\infty[) \subset]-\varepsilon;\varepsilon[$



-3

ليكن $\varepsilon \succ 0$

نبحث عن $B \succ 0$ حيث $x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

لدينا $\forall x \succ 0 \quad |f(x)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} \prec \varepsilon \Leftrightarrow x \succ \frac{1}{\varepsilon}$

نأخد $B=\frac{1}{\varepsilon}$

للحصول $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$ نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

خاصيات

خاصية1

$$\forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0$$

خاصية2

إذا وجد مجال على شكل $]a;+\infty[$ بحيث

$\forall x\in]a;+\infty[\quad |f(x)|\le u(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

تمرين تطبيقي

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}$

$4x^2+3\succ x^2$ ومنه $\left|\frac{7}{4x^2+3}\right|\le\frac{7}{x^2}$ وحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}=0$

2- النهاية l عند $+\infty$

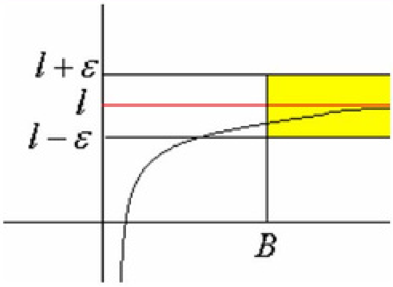
تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط

إذا كان $\forall\varepsilon\succ0 \quad \exists B\succ0 \quad x\succ B\Rightarrow|f(x)-l|\prec\varepsilon$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$



مثال

بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2+1}=1$

3- النهاية l عند $-\infty$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=l$

نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$

ملاحظات

- إذا كانت f زوجية فان $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
- إذا كانت f فردية فان $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

III- النهايات المنتهية والترتيب

خاصيات

خاصية1

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و f موجبة على I فان $l\geq 0$

خاصية2

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ بحيث $l\neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقط J مركزه x_0 بحيث $\forall x\in J \quad f(x)\times l \succ 0$

خاصية3

f و g دا لتان معرفتان على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=l'$ و كان $f\geq g$ على I فان $l\geq l'$

خاصية4

f و g و h دوال معرفة عى مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l$ وكان $f\geq h\geq g$ على I فان $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$

IV- العمليات على النهايات المنتهية

f و g دالتان لكل منهما نهاية منتهية في x_0 و λ عدد حقيقي
الدوال $f+g$ و λf و $f\times g$ و $|f|$ لهما نهاية منتهية في x_0

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$

إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في $x_0=+\infty$ و $x_0=-\infty$

V- العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

*- مجموع دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
*- جداء دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
*- جداء دالة متصلة في x_0 في عدد حقيقي هي دالة متصلة في x_0
*- اذا كانتا f و g دا لتين متصلتين x_0 وكان $g(x_0)\neq 0$ فان الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان في x_0
*- اذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 ومتصلة في x_0 فان دالة $\sqrt{f}$ متصلة في x_0
*- اذا كانت f متصلة وكانت $x\to f(ax+b)$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 فان الدالة $x\to f(ax+b)$ متصلة في x_0

نتيجة

كل دالة جدرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجدرية هي خارج دالتين حدوديتين

تمارين

1- حدد $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$; $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$ $\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+5x-2}$; $\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

2- أدرس اتصال الدوال

$f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x}$ $g(x)=x^2-1+\sqrt{x-2}$ $\begin{cases}h(x)=2x^2-x & x\succ1\\ h(x)=-x^2+2 & x\le1\end{cases}$ $t(x)=\frac{2x^2-3x}{|x|}$

VI - الدوال المثلثة

نقبل النتيجة $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1- نهايات و اتصال الدوال $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ و $x\to\tan x$

* لدينا $|\sin x|\le|x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $\lim_{x\to0}|x|=0$ ومنه $\lim_{x\to0}\sin x=0$

إذن الدالة $x\to\sin x$ متصلة في 0 ومنه الدالة $x\to\sin(ax+b)$ متصلة في 0

$$\lim_{x\to0}\cos x=\lim_{x\to0}1-2\sin^2\frac{x}{2}=1*$$

إذن $x\to\cos x$ متصلة في0

$$\lim_{x\to0}\tan x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

$x\to\tan x$ متصلة في 0

* ليكن $x_0\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\sin x&=\lim_{h\to0}\sin(x_0+h)\\&=\lim_{h\to0}[\sin x_0\cosh+\sinh\cos x_0]\\&=\sin x_0\cos0+\sin0\cos x_0=\sin x_0\end{aligned}$$

إذن دالة $x\to\sin x$ متصلة في x_0

خاصية

الدالتان $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan x$ متصلة في حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

نتائج

الدالتان $x\to\sin(ax+b)$ و $x\to\cos(ax+b)$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

2- نهايات اعتيادية هامة

نحدد $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\sin x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\tan x|}$ حيث $x\neq0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le1$

و حيث أن $\lim_{x\to0}\cos x=1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1 \quad *$$

خاصية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

نتيجة

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

تمرين

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 4x+\sin 2x}$

VII- النهايات اللامنتهية

1- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند x_0

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{|x|}$

1- أنشئ C_f

2- أتمم الجدول التالي

x	10^{-100}	10^{-10^9}	$10^{-10^{12}}$	$10^{-10^{100}}$
$f(x)$				

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ 0)\quad (\exists\alpha\succ 0)\quad (\forall x\in D_f)\quad 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}f(x_0+h)=+\infty$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}-f(x)=+\infty$$

خاصية

ليكن $k\in\mathbb{R}^{+*}$; $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{k}{\sqrt{|x|}}=+\infty$; $\lim_{x\to 0}\frac{k}{|x^n|}=+\infty$

2- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a;+\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \succ 0) \quad (\exists B \succ 0) \quad \forall x \in D_f \quad x \succ B \Rightarrow f(x) \succ A$$

خاصية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} -f(x) = +\infty$$

خاصية

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

النهايات والترتيب

* إذا كان لكل x من I , $f(x) \geq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

* إذا كان لكل x من I , $f(x) \leq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x) = -\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

ملاحظة الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بالمجالات $]a;+\infty[$ و $]-\infty;a[$ و $]x_0;x_0+\alpha[$ و $]x_0-\alpha;x_0[$ $(\alpha \succ 0)$

VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية

تعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
$l \quad l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \quad l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب- نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f \times g$
$l \quad l \neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l
$l \quad l \neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجداء الدالة الثابتة $x \to \lambda$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
∞مع وضع إشارة l	0^+	l حيث $l \neq 0$
∞مع وضع عكس إشارة l	0^-	l حيث $l \neq 0$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞مع وضع إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞مع وضع عكس إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$

د- نهاية $\sqrt{f}$

نهاية $\sqrt{f}$	نهاية f
$+\infty$	$+\infty$

IX- تطبيقات

1- دالة القوة الصحيحة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

- إذا كان n زوجي فان $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- إذا كان nفردي فان $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

نتيجة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

وحيث $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right] = 1$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5+3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty} -4x^5=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7+7x^3-x+31=\lim_{x\to-\infty} -3x^7=+\infty$$

3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\quad;\quad\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\qquad\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\qquad\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-x\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+3x}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}\quad;\quad\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-4}{x}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x+1}-4}$$

Moustaouli Mohamed