ذ. محمد الكيال

# النهايات (تذكير)

## ↩ نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ | $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ |

| إذا كان $n$ عددا فرديا فإن: | إذا كان $n$ عددا زوجيا فإن: |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ |
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ | $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ | $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ |

## ↩ نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

| | |
|---|---|
| نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة | نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة |

## ↩ نهايات الدوال المثلثية:

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ |

## ↩ نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

| $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$ | $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$ |
|---|---|
| $\ell \geq 0$ | $\sqrt{\ell}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ |

هذه النهايات تبقى صالحة عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

## النهايات و الترتيب:

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - \ell| \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

## العمليات على النهايات:

### نهاية مجموع دالتين:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)+f(x)]$ | $\ell+\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ش غ م |

### نهاية جداء دالتين:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell<0$ | | $\ell>0$ | | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)\times f(x)]$ | $\ell\times\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ش غ م |

### نهاية خارج دالتين:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell<0$ | | $\ell>0$ | | $-\infty$ | | $+\infty$ | | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell'\neq 0$ | $\pm\infty$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ش غ م | ش غ م |

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

# الاتصال

## الاتصال في نقطة:

**تعريف:**

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:**

- $f$ متصلة على اليمين في $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- $f$ متصلة على اليسار في $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

$f$ متصلة على اليمين و على اليسار في $x_0 \Leftrightarrow f$ متصلة في $x_0$

## الاتصال على مجال:

تكون $f$ دالة متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت $f$ متصلة في كل عنصر من المجال $]a,b[$

تكون $f$ دالة متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت $f$ متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على اليمين في $a$ و متصلة على اليسار في $b$

## العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن $f$ و $g$ دالتين متصلتين على مجال $I$ و $k$ عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f\times g$ و $kf$ متصلة على المجال $I$
- إذا كانت $g$ لا تنعدم على $I$ فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال $I$

**نتائج:**

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

## اتصال مركب دالتين:

إذا كانت $f$ دالة متصلة على مجال $I$ و $g$ متصلة على مجال $J$ بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: $gof$ متصلة على المجال $I$

## صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

**حالات خاصة:** لتكن $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $I$

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

| المجال $I$ | المجال $f(I)$ | |
|---|---|---|
| | $f$ تزايدية قطعا على $I$ | $f$ تناقصية قطعا على $I$ |
| $[a,b]$ | $[f(a);f(b)]$ | $[f(b);f(a)]$ |
| $[a,b[$ | $\left[f(a);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a,b]$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$ | $\left[f(b);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $]a,b[$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to b^-} f(x);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $[a,+\infty[$ | $\left[f(a);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a,+\infty[$ | $\left]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$ |
| $]-\infty,a]$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$ | $\left[f(a);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |
| $]-\infty,a[$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);\lim_{x\to a^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to a^-} f(x);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |
| $\mathbb{R}$ | $\left]\lim_{x\to -\infty} f(x);\lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim_{x\to +\infty} f(x);\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$ |

## مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت $f$ متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي $\beta$ محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $[a,b]$ بحيث : $f(\alpha)=\beta$

**نتيجة:**

إذا كانت $f$ متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ينتمي إلى المجال $[a,b]$

## طريقة التفرع الثنائي:

لتكن $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث : $f(a)\times f(b)<0$
وليكن $\alpha$ الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

| إذا كان : $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ | إذا كان : $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ |
|---|---|
| فإن : $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$<br>يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد $\alpha$ | فإن : $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$<br>يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد $\alpha$ |

**ملاحظة:** وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد $\alpha$ سعته مرغوب فيها