تمرين1

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(\sqrt{9x^2+x+1}-2x)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\sqrt{x+2})$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x^3}-\sqrt{-x^3+x+1})$

5) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1+\sqrt{-x+1}}{x^2-\sqrt{x^2+2}}$ 7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 9) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-x-6+\sqrt{3x-x^2}}{x+3}$ 11) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3-x}-3}{x+1}$ 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos x-\sin x-\sqrt{3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}$ 15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

تمرين2

نعتبر الدالة
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\sin(\dfrac{1}{x-1}) & ; x<1\\ \dfrac{x^2-2x-8}{|x-2|-2} & ; x\geq 1\end{cases}$$

1) حدد D_f وادرس اتصال f عند $x_0=1$ 2) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$

3) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-a}{x-2} & ;x>2\\ \dfrac{2x^2+b-a}{x} & ;x\leq 2\end{cases}$$

حدد العددين a وb بحيث تكون الدالة f متصلة في النقطة 2

تمرين4

نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}$

1) حدد D_f وأحسب النهايات عند محدات D_f

2) هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في كل من 2 و 2- ؟

تمرين 5

نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2}$

1) حدد D_f

2) بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في 0 .

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{2\cos x-1} & ;x\neq\dfrac{\pi}{3}\\ f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

بين أن f متصلة في $\frac{\pi}{3}$.

تمرين 7

نعتبر الدالة f : $\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{2}{x}\right), x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) ادرس اتصال f في 0.   2) احسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

تمرين 8

1) بين أن المعادلة $x^5+x^3-x^2+x+1=0$ تقبل على الاقل حلا في IR

2) بين أن المعادلة $3x^7+2x^5+x-10^6\sqrt[4]{3}=0$ تقبل حلا وحيدا في IR

3) نعتبر الدالة $f(x)=x^4+x-1$. بين أن المنحنى C_f يقطع محور الأفاصيل في المجال $[0,1]$

4) نعتبر الدالتين : $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=-x^3$

بين أن المنحنيين C_f و C_g يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث : $-\frac{7}{8}<\alpha<-\frac{3}{4}$

تمرين 9

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(0)=0 وf(1)=1

بين أن $'(\exists c\in]0,1[): f(c)=\frac{1-c}{1+c}$

تمرين 10

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث

$f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$ مع $(a<b)$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=bc$

تمرين 11

لتكن f دالة عددية تحقق $\exists k\in IR_+^*;\forall(x,y)\in IR^2: |f(x)-f(y)|\leq k\times|x-y|$

بين أن f دالة متصلة على IR

تمرين 12

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(0)=f(1)=0 و $(\forall x\in[0,1]):\ f(x)\geq 0$.

بين أن $(\forall n\in IN^*)(\exists c\in[0,1]): f(c)=\ f(c+\frac{1}{n})$

تمرين 13

لتكن f دالة معرفة من IR^+ نحو IR^+ بحيث : f متصلة على IR^+ و $(\forall x\in IR^+):\ f(x)<x$ و x

1) بين أن $f(0)=0$.

2) بين أن : $(\forall(a,b)\in(IR_*^{+2}))(\exists M\in[0,1[)(\forall x\in[a,b]): f(x)\leq Mx$

تمرين 14

1) بين أنه لكل n من IN^* المعادلة $Arc\cos(x)-x^n=0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$.

2) قارن العددين a_n و $\frac{1}{2}$.

3) بين أنه : $(\forall n\in IN^*): a_{n+1}>a_n$.

تمرين 15

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ حيث $\forall x\in[a,b]: f(x)>0$.

أثبت أن $\exists m>0, f(x)\geq m$

تمرين 16

نعتبر العددين $A=3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}$ et $B=-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}$

1) أحسب $A-B$ و $\sqrt[3]{AB}$

2) نعتبر العدد $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

a) أحسب x^3 بدلالة x . b) استنتج أن $x=1$.

تمرين 17

حل في IR المعادلات التالية :

1) $(2x-1)^5=32$ 2) $(x+1)^3=-27$ 3) $x^6=6$ 4) $x^4=-2$ 5) $(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}})^3+8=0$

6) $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$ (يمكن وضع $t=\sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$)

تمرين 18

نعتبرالدالة $f(x)=2x^2-4x+1$

1) ادرس تغيرات f وانشئ منحناها .

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$

a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

b)حدد $g^{-1}(x)$ وارسم $C_{g^{-1}}$

تمرين 19

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

بين أن f تقابل من $[-1,1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

تمرين 20

نعتبرالدالة $f(x)=\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$

1) حدد D_f

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,2]$

a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

b)حدد $g^{-1}(x)$

تمرين 21

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$f(x)=(\sqrt{x+1}-1)^3$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) a) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[-1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

b) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 22

نعتبر الدالة $f(x)=x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) حل في IR^+ المعادلة $f(x)=x$

3) a) بين أن $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)^3+1$

b) بين أن الدالة f تزايدية قطعا من المجال $[0,+\infty[$

c) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

d) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 23

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x)=-x-3\sqrt[3]{(1-x)^2}+3\sqrt[3]{1-x}+1$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) بين أن f تقابل من $]-\infty,1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$.

3) حل في $]-\infty,1]$ المعادلة $f(x)=1$.

تمرين 24

نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1) a) بين أن : $(\forall x\in]-1,+\infty[):f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

b) بين أن f تقابل من $]-1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f^{-1}(x)=f(x)$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{(4-\sqrt[3]{x^2})^3}$:

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f : D_f

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,8]$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$.

تمرين 26

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$

1) بين أن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2) بين أن $(\forall x\in IR):x-\sqrt{x^2+4}<0$

3) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

4) حل في $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=\sqrt{5}$

تمرين 27

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3-x+1}-x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+2x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{-x^3+2x^2-x}-\sqrt{2x^2+1})$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3-1}-2x)$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{-8x^3+x^2+1}+2x)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{-3x^3-1}+x\ \sqrt[3]{3})$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+x}{\sqrt[3]{1-x}-x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[4]{-x^3+4x+1}-\sqrt{2-x}}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}$

11) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$

12) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+x^2+x-2}{x-1}$

13) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+x^2+x}{x+1}$

تمرين 28

أثبت المتساويات التالية :

1) $Arc\tan(\frac{1}{5})+Arc\tan(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{4}$

2) $Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

3) $Arc\tan\frac{1}{3}+Arc\tan\frac{1}{7}-Arc\tan\frac{1}{2}=0$

4) $(\forall x>0): Arc\tan(x)+Arc\tan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$

5) $(\forall x<0): Arc\tan(x)+Arc\tan(\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$

6) $(\forall x\in IR)\ :\ \cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7) $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$ (لاحظ أن $0\le\arctan(\frac{1}{5})\le\frac{\pi}{8}$)

8) $(\forall x>0)\ :\ Arc\tan(x+1)-Arc\tan x=Arc\tan(\frac{1}{x^2+x+1})$

تمرين 29

أحسب $\arctan 2+\arctan 3$

تمرين 30

حل في IR المعدلة :

$$Arc\tan(\frac{x-8}{8})-Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$$

تمرين 31

حل في IR المعادلات التالية .

1) $Arc\tan 2x+Arc\tan(3x)=\frac{\pi}{4}$ 2) $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2})+Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$

تمرين 32

نعتبر في IR المعادلة

$$(E):\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$$

1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في IR وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.

2) حل المعادلة (E) .

تمرين 33

أحسب النهايات لتالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$ 2) $\lim_{x\to\frac{\sqrt3}{3}}\frac{Arc\tan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt3}{3}}$

3) $\lim_{x\to1}Arc\tan(\frac{x}{x^2-1})$ 4) $\lim_{x\to0^-}\frac{Arc\tan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}$

5) $\lim_{x\to+\infty}x(Arc\tan x-\frac{\pi}{2})$. 6) $\lim_{x\to0^-}x(\arctan(\frac{1}{x})+\frac{\pi}{2})$

7) $\lim_{x\to+\infty}(x\ \ \arctan(\frac{x+1}{x})-\frac{\pi}{4}x)$

تمرين 34

نعتبر الدالة $f(x)=\arctan(\frac{x+1}{x})$

1) حدد D_f .

2) ليكن g قصور f على $]0,+\infty[$.

a) بين أن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال يجب تحديده .

b) حدد $f^{-1}(x)$.

تمرين 35

حل في IR المعدلتين :

1) $Arc\tan 2x + Arc\tan(3x)=\frac{\pi}{4}$ 2) $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2})+Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$

تمرين 36

نعتبر في IR المعادلة $(E): \arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$

1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.

2) حل المعادلة (E) .