الإتصال و دراسة الدوال

تمرين1

احسب

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

الحل:

$$A=\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+9}{\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}^2+\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}\sqrt[3]{15x^3+1}+\sqrt[3]{15x^3+1}^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}^2+\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}^2\right)}$$

$$\boxed{A=\frac{7}{3\sqrt[3]{15}^2}}$$

تمرين2

حدد D_f ثم بين أن f متصلة في x_0 :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375} & x\neq 3375 \\ f(3375)=\dfrac{1}{675} \end{cases} \qquad x_0=3375$$

الحل التمرين 2:

$D_f=\mathbb{R}^{+}$

طريقة 1

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\lim_{x\to3375}\frac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375}$$

$$=\lim_{x\to3375}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+15\sqrt[3]{x}+225}$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim\limits_{x\to3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f **متصلة في 3375**

طريقة 2 (العدد المشتق)

نعتبر : $g(x)=\sqrt[3]{x}$ **متلة على** $\mathbb{R}$ **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}^{*}$

و $\forall x\in\mathbb{R}^{*} \qquad g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$

نعتبر : $x_0=3375$, $g(3375)=15$ و

$$g'(3375)=\frac{1}{675}$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\lim_{x\to3375}\frac{g(x)-g(3375)}{x-3375}$$

$$=g'(3375)$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim\limits_{x\to3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f **متصلة في 3375**

تمرين3

$$f(x)=3x+\sqrt{2x-6}$$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن f **المعرفة من** I **نحو** J **(يجب تحديد** J **) تقبل دالة عكسية** f^{-1} **. ثم حدد** f^{-1}

ب- استنتج أن المعادلة : $f(x)=10$ **تقبل حلا وحيدا في المجال** I

حل التمرين 3:

أ - $I=D_f=[3,+\infty[$

f **متصلة على** D_f **قابلة للإشتقاق على** $]3;+\infty[$ $\qquad (1)$

$$\forall x\in]3;+\infty[\qquad f'(x)=3+\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

بما أن : $\forall x\in]3;+\infty[\quad f'(x)>0$

فإن : f **تزايدية قطعا على** $[3;+\infty[$ $\qquad (2)$

إذن : $f([3,+\infty[)=\left[f(3),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

و منه : $f([3,+\infty[)=[9,+\infty[$

من (1) **و** (2) **:** f **تقبل دالة عكسية** f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x\in[9;+\infty[$ **و** $y\in[3;+\infty[$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$

$$\Leftrightarrow 3y+\sqrt{2y-6}=x$$

$$\Leftrightarrow 2y-6=x^2+9y^2-6xy$$

$$\Leftrightarrow 9y^2-2y(3x+1)+(x^2+6)=0$$

$$9y^2-2y\left(3x+1\right)+\left(x^2+6\right)=0$$
$$\Delta=4\left(3x+1\right)^2-4\left(x^2+6\right)\times 9$$
$$\Delta=4\left(6x-53\right)$$

بما أن : $x\geq 9$ فإن : $6x-53>0$

$$y_1=\frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$$

أو $y_2=\dfrac{3x+1+\sqrt{6x-53}}{9}$

بالنسبة ل $x=9$ نجد : $y_1=3$ و $y_2\neq 3$

بما أن : $f(3)=9$ فإن : $f^{-1}(x)=y_1$

إذن : $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$:

$\forall x\in\left[9;+\infty\right[$

و منه :
$$f^{-1}:\ \left[9;+\infty\right[\to\left[3;+\infty\right[$$
$$x\ \to\frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$$

ب- بما أن f متصلة و رتيبة قطعا على $\left[3;+\infty\right[$

و $f\left(\left[3,+\infty\right[\right)=\left[9,+\infty\right[$ و $10\in\left[9,+\infty\right[$

فإن : المعادلة : $f\left(x\right)=10$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين4

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x\in\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\} \\ f\left(1\right)=12 \end{cases}$$

أ- بين أن f متصلة في 1

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

حل التمرين 4:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x\in\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\} \\ f\left(1\right)=12 \end{cases}$$

أ - لنبين أن : f متصلة في 1

نعتبر : $g\left(x\right)=\sqrt{13x^2-12}-x$ معرفة على $\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$

g متصلة على $\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$ قابلة للإشتقاق على $\left]\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$

$$\forall x\in\left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[\ :\ \ g'\left(x\right)=\frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}}-1$$

$g\left(1\right)=0$ و $g'\left(1\right)=12$

$$\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}$$
$$=g'\left(1\right)$$
$$\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=12$$

إذن : $\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=f\left(1\right)$

و منه : f متصلة في 1

ب- لنبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}-12}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{13x^2-12}-(13x-12)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(13x^2-12\right)-(13x-12)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156x^2+312x-156}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156\left(x-1\right)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156}{\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\frac{-156}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-78}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 1

و : $\boxed{f'(1) = -78}$

ج- $\forall x \in \left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{\left(\frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}}-1\right)(x-1)-\left(\sqrt{13x^2-12}-x\right)}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{13x^2-12}-13x+12}{(x-1)^2\sqrt{13x^2-12}}}$$

تمرين5

حلل هندسيا ما يلي :

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\infty$

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = +\infty$

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = +\infty$

حل اتمرين5

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$

(C_f) **يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول** 3

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\infty$

(C_f) **يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول** 3

موجه نحو الأسفل .

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = +\infty$

(C_f) **يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول** 3

موجه نحو الأعلى

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = +\infty$

(C_f) **يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول** 3

موجه نحو الأسفل .