2 ع ت — اتصال دالة

1. اتصال دالة :

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. الاتصال على مجال :

– تكون دالة متصلة على مجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة منه

– تكون دالة متصلة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ، على اليمين في a و على اليسار في b .

خاصيـــــات :

– كل دالة حدودية متصلة على R .

– كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

– الدالتان $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ متصلتان على R .

– الدالة $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $[0,+\infty[$.

– الدالة $x \to \tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها وهي $D = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in Z\right\}$

3. العمليات على الدوال المتصلة :

– إذا كانت f و g دالتين متصلتين في عدد x_0

فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و $\alpha.f$ حيث α عدد حقيقي متصلة في x_0

– وإذا كان $g(x_0) \neq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان متصلتان في x_0

4. اتصـــال مركبة دالتين :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J حيث $f(I) \subset J$ و x_0 عنصرا من I

إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$

فإن الدالة $g \circ f$ تكون متصلة في x_0 .

نتيجة: إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0

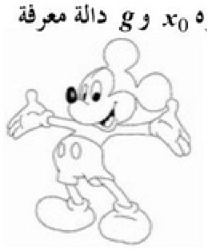
فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$

إذا كان : $\lim\limits_{x_0} f(x) = l$ و g متصلة في l

فإن : $\lim\limits_{x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$



5. مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و λ عددا حقيقيا محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ حيث : $f(c) = \lambda$

نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f(a).f(b) \prec 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]a,b[$.

وإذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن الحل يكون وحيدا

6. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J = f(I)$ ولدينا التكافؤ التالي :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I فإن :

. دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس تغيرات f

. منحنيي f و f^{-1} متماثلان في م م م بالنسبة للمنصف الأول

7. تعريف دالة الجذر من الرتبة n :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

الدالة العكسية لقصور الدالة $x \to x^n$ على R^+ يسمى دالة الجذر من الرتبة n

خاصيـــات :

. الدالة $x \to \sqrt[n]{x}$ معرفة على R^+ وتأخذ قيمها في R^+

. الدالة $x \to \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على R^+ .

. $\begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in R^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^n \\ x \in R^+ \end{cases}$

. $\forall x \in R^+, \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad *** \quad \forall x \in R^+, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

$$(\forall x \in R^+) \; (\forall y \in R^+) \; : \; \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$(\forall x \in R^+) \; (\forall y \in R^+) \; : \; \sqrt[n]{x} \prec \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \prec y$$

$\forall x \geq 0 \quad : \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \quad **** \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$

$\forall x \geq 0 \;,\; \forall y \geq 0 \; : \quad \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$\forall x \geq 0 \;,\; \forall y \succ 0 \; : \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \succ 0)$

+. إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ويكتب $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ حيث : $r = \frac{p}{q}$ مع $p \in Z^*$ و $q \in N^*$

خاصيـــات : لكل a و b من R_+^* و r و r' من Q^* لدينا :

$$a^r . a^{r'} = a^{r+r'} \;,\; (ab)^r = a^r b^r \;;\; a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \;;\; \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \;;\; \left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'}$$