تصحيح التمرين 1:

1) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=2$
لدينا :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1-9}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4$$
$$=12$$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 2 و لدينا : $f'(2)=12$

<u>التأويل الهندسي :</u> C_f يقبل مماس في النقطة $A(2,9)$ معامله الموجه : 12

و معادلته : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$$\boxed{y=12x+15}$$

2) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=1$ على اليمين :
لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في العدد $a=1$ على اليمين

<u>التأويل الهندسي :</u> C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(1,0)$

تصحيح التمرين 2:

(1 $f'(x)=\left(6x-\sqrt{7}\right)'=6$

(2 $f'(x)=\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)'=2x-\frac{5}{2}$

3) $f'(x)=(x.\sin x)'=(x)'.\sin x+x.\sin'(x)=1.\sin x+x.\cos x=\sin x+x.\cos x$

4) $f'(x)=\left((cos)^4\right)'(x)=4.\cos'(x).\cos^{4-1}(x)=-4\sin(x).\cos^3(x)$

5) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)'=\dfrac{\left(x^2\right)'.(x+1)-x^2.(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

6) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+7}\right)'=\dfrac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

7) $f'(x)=\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'.\sin'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-1}{x^2}.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

8) $f'(x)=\left(cos\left(x^3\right)\right)'=\left(x^3\right)'.\cos'\left(x^3\right)=-3x^2.\sin\left(x^3\right)$

9) $f'(x)=(\tan(4x))'=(4x)'.\tan'(4x)=4.\left(1+\tan^2(4x)\right)$

تصحيح التمرين 3:

1) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)'=\dfrac{(3x+1)'}{3\sqrt[3]{3x+1}^2}=\dfrac{3}{3\sqrt[3]{3x+1}^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}^2}$

2) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\dfrac{\left(x^2\right)'}{3\sqrt[3]{x^2}^2}=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3) $f'(x)=\left(x.\sqrt[3]{x}\right)'=(x)'.\sqrt[3]{x}+x.\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\sqrt[3]{x}+x.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}=\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

4) $f'(x)=\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^5\right)'=5.\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(\sqrt[3]{x}\right)^{5-1}=5.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}.\sqrt[3]{x}^4=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x}^2$

5)

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'x+\sqrt[3]{x^3+1}.(x)'}{x^2}=\frac{\frac{\left(x^3+1\right)'}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2}.x-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2}.x-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2}-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{x^3-\left(x^3+1\right)}{\sqrt[3]{x^3+1}^2}}{x^2}=\frac{-1}{x^2\sqrt[3]{x^3+1}^2}$$

تصحيح التمرين 4:

(1

✓ f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

✓ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 3x^2 + 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 0$

و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و بالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$

بحيث : $J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

(2

$$\begin{aligned} f^{-1}(2) = \alpha \quad & \Leftrightarrow \quad f(\alpha) = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 2) = 0 \end{aligned}$$

لدينا : $\begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \\ \Delta = -7 \end{pmatrix}$

إذن : $\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(2) = \alpha$ و منه : $f^{-1}(2) = 1$

(3 لدينا : $f(1) = 2$

✓ f قابلة للاشتقاق في 1

✓ $f'(1) = 4 \neq 0$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في 2 $f(1) = 2$

(4 $(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$

تصحيح التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1 & ;0\le x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{4} & ;x\ge 1 \end{cases}$

1) لدينا : $f(1)=\dfrac{1^2-1}{4}=0$

✓ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}-1=0$

✓ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{4}=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ فإن f متصلة في 1.

2)

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و لدينا : $f'_g(1)=\dfrac{1}{2}$

✓ و لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليمين و لدينا : $f'_d(1)=\dfrac{1}{2}$

- بما أن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و على اليمين و $f'_d(1)=f'_g(1)$ فإن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 و لدينا : $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

3) **<u>التأويل الهندسي :</u>** C_f يقبل مماس في النقطة $A(1,0)$ معامله الموجه : $\dfrac{1}{2}$

و معادلته : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}}$

تصحيح التمرين 6:

1) $$f'(x)=\left(x^5+\frac{1}{2}x^4-2x^3+5x-4\right)'=5x^4+2x^3-6x^2+5$$

2) $$f'(x)=\left((2x+1)\sqrt{x}\right)'=(2x+1)'\sqrt{x}+(2x+1)\left(\sqrt{x}\right)'=2\sqrt{x}+(2x+1).\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

3) $$f'(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x+3}\right)'=\frac{(x^2+x+1)'\times(x+3)-(x^2+x+1)\times(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{(2x+1)(x+3)-(x^2+x+1)}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x+x+3-x^2-x-1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+2}{(x+3)^2}$$

4) $$f'(x)=\left((4-3x)^3\right)'=3(4-3x)'(4-3x)^{3-1}=(3)\times(-3)(4-3x)^2=-9(4-3x)^2$$

5) $$f'(x)=\left(\frac{4}{(x^2-1)^3}\right)'=4\times\left(\frac{1}{(x^2-1)^3}\right)'=4\times\frac{-\left((x^2-1)^3\right)'}{\left((x^2-1)^3\right)^2}=-4\times\frac{3(x^2-1)'(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6}=-12\times\frac{2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-24}{(x^2-1)^4}$$

6) $$f'(x)=\left(\sqrt{2x^2-3x+1}\right)'=\frac{(2x^2-3x+1)'}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}=\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}$$

7) $$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\times x-\sqrt{x^2-1}\times(x)'}{x^2}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\times x--\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

8) $$f'(x)=\left(\sin^4x-\cos^2x\right)'=4\sin'(x)sin^3x-2\cos'(x)\cos x=4\cos(x)\sin^3(x)+2\sin(x)\cos(x)=2\sin(x)\cos(x)\left(2\sin^2(x)+1\right)$$

9) $$f'(x)=\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

10) $$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'=1+\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

11) $$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right)'=\frac{(x^3-3x+2)'}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2}=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2}=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2}$$

تصحيح التمرين 7:

1. لندرس تغيرات f على $\mathbb{R}$
لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية
ليكن $x \in \mathbb{R}$:
لدينا : $f'(x)=\left(x^3-3x-3\right)'=3x^2-3$
إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'(x)=3\left(x^2-1\right)$
لدينا : $f'(x)=0 \iff (x=1$ أو $x=-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3(x2-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$:</u>
لدينا $f'(x)\geq 0$ و $(x=1$ أو $x=-1) \iff f'(x)=0$ إذن f تزايدية قطعا
<u>على المجال $[-1,1]$:</u>
لدينا : $f'(x)\leq 0$ و $(x=1$ أو $x=-1) \iff f'(x)=0$ إذن f تناقصية قطعا

2. ليكن g قصور f على المجال $[1,+\infty[$
أ-
✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1,+\infty[$ (كقصور لدالة حدودية)
✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$
إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J نحو $[1,+\infty[$
حيث : $J=g\left([1,+\infty[\right)=\left[g(1),\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=[-5,+\infty[$

ب-
•
✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1,+\infty[$
✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$
✓ و كذلك : $0\in g\left([1,+\infty[\right)$
إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[1,+\infty[$

•

- ✓ لدينا g دالة متصلة على $[0,1]$
- ✓ و لدينا : $g(2)\times g(3)<0$ ($g(3)=15$ و $g(2)=-1$)

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $2<\alpha<3$

.3

- ✓ لدينا g قابلة للاشتقاق في α
- ✓ و لدينا : $g'(\alpha)=3\left(\alpha^2-1\right)\neq 0$

إذن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $g(\alpha)=0$

و لدينا : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\left(g^{-1}\right)'\left(g(\alpha)\right)=\dfrac{1}{g'(\alpha)}=\dfrac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$

つづく