

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

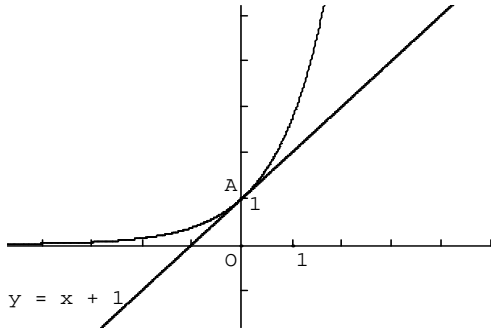
مذكرة رقم 8 في درس الدوال الأسية

محتوى البرنامج

- الدالة الأسية النبيرية
- تعريف وخصائص جبرية
- نهايات اعتيادية
- مشتقة الدالة الأسية النبيرية
- الدالة الأصلية للدالة الأسية النبيرية
- الدالة الأسية للأساس a .
- تعريف وخصائص جبرية
- دالة الأسية للأساس 10
- دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيري

القدرات المنتظرة

- التمكن من حل معادلات و متراجحات اسية نبيرية
- التمكن من نهايات الدوال الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من النهايات الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات و دوال أسية نبيرية
- تحديد قيم مقربة للعدد e^a ($a \in \mathbb{R}$) أو تحديد قيم مقربة للعدد a بحيث e^a معلوم باستعمال الأداة المعلوماتية



(3) خاصيات:

لكل x و y من \mathbb{R} و لكل r من \mathbb{Q} لدينا:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{x+y} = e^x \times e^y \bullet$$

$$(\forall x \in]0; +\infty[) (e^x)' = e^x \text{ و } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \bullet$$

تمرين 1: ليكن a عددا حقيقيا, و b عددا من \mathbb{R}^{**} بسط ما يلي :

$$B = \frac{(e^a)^5 \times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^2} \text{ و } A = e^{\ln(b)} - \ln(2e^b) - \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$\text{نضع: } f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} \text{ أحسب } f(2 \ln 3)$$

I. الدالة الأسية النبيرية

الدالة \ln متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0; +\infty[$ و

$$\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$$

و منه الدالة \ln تقبل دالة عكسية معرفة على \mathbb{R} .

1) تعريف: الدالة العكسية للدالة \ln تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز \exp .

ملاحظة: الكتابة: $\exp(x)$ نكتبها باختصار على الشكل: e^x

(2) نتائج: $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0; +\infty[), (y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y)$$

$$(\forall x \in]0; +\infty[); e^{\ln x} = x \text{ و } (\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$$

الدالة \exp متصلة و تزايدية قطعا على \mathbb{R}

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}$$

منحنى الدالة \exp : في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة \exp هو مماثل لمنحنى الدالة \ln بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$.

أجوبة:

$$A = e^{\ln(b)} - \ln(2e^b) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) = b - \ln 2 - \ln(e^b) - \ln e + \ln 2$$

$$A = b - \ln 2 - b - 1 + \ln 2 = -1$$

$$B = \frac{(e^a)^5 \times e^{3-a}}{\left(e^{\frac{1+3a}{2}}\right)^2} = \frac{e^{5a} \times e^{3-a}}{e^{2\left(\frac{1+3a}{2}\right)}} = \frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B = \frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}} = e^{4a+3-2-3a} = e^{a+1}$$

$$f(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} - 2e^{\frac{2 \ln 3}{2}} = e^{\ln 3^2} - 2e^{\ln 3} = 3^2 - 2 \times 3 = 3$$

تمرين 2: بسط ما يلي: $A = e^{-x} \times e^{2x}$

$$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} \quad B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$$

$$E = e^{2x} \left((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right), \quad D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$$

أجوبة: $A = e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$

$$B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4} = e^{2(2-x)} \times e^{3x-4} = e^{4-2x+3x-4} = e^x$$

$$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x} = e^{\frac{2x}{2}} \times e^{-x} = e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$$

$$D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} = \frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}} = \frac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$$

$$E = e^{2x} \left((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right)$$

$$E = e^{2x} \left((e^x)^2 + 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^x)^2 - 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 \right)$$

$$E = e^{2x} (e^{2x} + e^{-2x} + e^{2x} + e^{-2x}) = e^{2x} (2e^{2x} + 2e^{-2x})$$

$$E = 2e^{4x} + 2$$

تمرين 3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{3x-1}{(e^x)^2 - 1} \quad \text{و} \quad f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$$

أجوبة: $f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x \neq 0\}$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x-2) = 0 \quad \text{يعني} \quad x=0 \quad \text{أو} \quad x=2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\} \quad \text{ومنه} \quad x=2 \quad \text{أو} \quad x=0$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{(e^x)^2 - 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / (e^x)^2 - 1 \neq 0\}$$

$$(e^x)^2 - 1^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad (e^x - 1)(e^x + 1) = 0$$

$$e^x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad e^x + 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad (e^x - 1)(e^x + 1) = 0$$

$$\text{يعني} \quad e^x = 1 \quad \text{أو} \quad e^x = -1$$

نعلم أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$ إذن المعادلة:

$$e^x = -1 \quad \text{ليس لها حل في } \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ومنه} \quad x=0 \quad \text{يعني} \quad x = \ln 1$$

تمرين 4: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad (3) \quad \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (2) \quad e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad (1)$$

$$e^{2x+1-x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$x=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow$$

$$S = \{0\} \quad \text{ومنه}$$

$$e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (2)$$

$$(2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow 2-x-1-2x = x-1 \Leftrightarrow$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \text{ومنه}$$

$$(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad (3)$$

نضع: $e^x = X$ والمعادلة تصبح: $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = 2 \quad \text{و} \quad X_1 = 3 \quad \text{يعني} \quad X_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad X_1 = \frac{5+1}{2 \times 1}$$

$$x_2 = \ln 2 \quad \text{و} \quad x_1 = \ln 3 \quad \text{يعني} \quad e^{x_2} = 2 \quad \text{و} \quad e^{x_1} = 3$$

$$S = \{\ln 2, \ln 3\} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 5: حل في \mathbb{R} المترجمات التالية:

$$\frac{1}{e^{x+1}} \geq e^{1-x^2} \quad (2) \quad e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x} \quad (1)$$

$$e^{-3-x+1+2x} > e^{-x} \Leftrightarrow e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow -3 - x + 1 + 2x > -x \Leftrightarrow$$

$$S =]1, +\infty[\quad \text{ومنه}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 - x \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow e^{-1-x} \geq e^{1-x^2} \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

إذن تقبل جذرين هما:

$$x_2 = -1 \quad \text{و} \quad x_1 = 2 \quad \text{يعني} \quad x_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{1+3}{2 \times 1}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\quad \text{ومنه}$$

تمرين 6: حل في \mathbb{R}^2 النظمات التالية:

$$(S_2) \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^x = \frac{2}{e^y} \end{cases} \quad (2) \quad (S_1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(S_1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ -2e^x - 2e^y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:

تمرين 7: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} (3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} (2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} (1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} (6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} (5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} (4$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} (9 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} (8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x (7$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} (11 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x (10$$

$$(14 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} (13 \quad (2x = X \text{ ضع}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} (12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1}$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

$$(17 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3) e^x (16 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1) e^x (15$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) e^{2x} (18 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{2x}$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) (20 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} (19$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} (23 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} (22 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1} (21$$

(استعمال المشتقة)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \quad (\text{أجوبة: 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \quad \text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty \quad \text{اذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0 \quad \text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty \quad \text{اذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \quad \text{اذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = +\infty \quad \text{لدينا: (5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

$$e^y = 2 \quad \text{يعني} \quad 2e^x + 3e^y - 2e^x - 2e^y = 8 - 6$$
$$y = \ln 2 \quad \text{يعني}$$

وبعويض y بقيمتها في المعادلة 2 نجد: $e^x + e^{\ln 2} = 3$

$$\text{يعني} \quad e^x + 2 = 3 \quad \text{يعني} \quad e^x = 1 \quad \text{يعني} \quad x = \ln 1 = 0$$

ومنه: $S = \{(0, \ln 2)\}$

$$\begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad (S_2) \quad \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x + y = \ln(2 \times 5) \\ x - y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} x + y = \ln(10) \\ x - y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} x + y = \ln 2 + \ln 5 \\ x - y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases} \quad \text{يعني}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $2x = 2 \ln 2$

$$x = \ln 2 \quad \text{يعني}$$

وبعويض x بقيمتها في المعادلة 1 نجد:

$$\ln 2 + y = \ln 2 + \ln 5$$

يعني $y = \ln 5$ ومنه: $S = \{(\ln 2, \ln 5)\}$

II. نهايات اعتيادية

خاصية 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

أمثلة: لنحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x$ لدينا.

$$(\forall x \in \mathbb{R}); (2x - 1) e^x = 2(x e^x) - e^x$$

و بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) e^x = 0$$

$$\text{لنحسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} \quad \text{لدينا:} \quad \frac{e^x + 3}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} = +\infty$$

خاصية 2: لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

مثال: لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$ لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{e^x + 3x}{x^3} = \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} = +\infty$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty : \text{اذن } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty : \text{ومنه}$$

$$x = \frac{X}{3} \text{ يعني } 3x = X \text{ نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} \quad (13)$$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\frac{X}{3}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X} = +\infty : \text{اذن } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty : \text{ومنه}$$

(14)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$\text{نعلم حسب سؤال سابق أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty \text{ ولدنيا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = +\infty : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x - e^x \quad (15)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^x - 4x^3 e^x \quad (16)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \quad (17)$$

$$X \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0^- \quad \frac{1}{x} = X \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 : \text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

(18)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x} - 2x e^{2x} = 0 - 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} \quad (19)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \text{ و } x = \frac{X}{2} \text{ يعني } 2x = X \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1 : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = +\infty : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = +\infty : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(3 - \frac{e^x}{x^3}\right) \quad (10)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{e^x}{x^3} = -\infty \text{ اذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = -\infty : \text{اذن}$$

(11)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty : \text{لأن}$$

$$(2x = X \text{ ضع}) \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad (12)$$

$$x = \frac{X}{2} \text{ يعني } 2x = X \text{ نضع}$$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 8 \frac{e^X}{X^3}$$

تمرين 8: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية: (1)

$$f(x) = e^{3x} + e^x$$

$$(4) f(x) = x^2 e^{-x} \quad (3) f(x) = 2x - e^{-x} \quad (2)$$

$$f(x) = (2x-1)(e^x - 1)$$

$$(7) f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x} \quad (6) f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \quad (8)$$

$$f'(x) = (e^{3x} + e^x) : \text{اذن } f(x) = e^{3x} + e^x \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f'(x) = (e^{3x})' + (e^x)' = (3x)' e^{3x} + e^x = 3e^{3x} + e^x$$

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad (2)$$

$$f'(x) = (2x - e^{-x})' = (2x)' - (e^{-x})' = 2 - (-x)' e^{-x} = 2 + e^{-x}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$f'(x) = (x^2 e^{-x})' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2x e^{-x} + x^2 (-x)' e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} (2x - x^2)$$

$$f(x) = (2x-1)(e^x - 1) \quad (4)$$

$$f'(x) = ((2x-1)(e^x - 1))' = (2x-1)' (e^x - 1) + (2x-1) (e^x - 1)'$$

$$f'(x) = 2(e^x - 1) + (2x-1)e^x = 2e^x - 2 + 2xe^x - e^x = e^x - 2 + 2xe^x$$

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left((x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)' = ((x-1))' e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left(e^{\frac{1}{x}} \right)'$$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 + (x-1) \frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2} \right)$$

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (\sqrt{e^{2x} - e^x})' = \frac{(e^{2x} - e^x)'}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}} = \frac{2e^{2x} - e^x}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}}$$

$$f(x) = e^{x \ln x} \quad (7)$$

$$f'(x) = (e^{x \ln x})' = (x \ln x)' e^{x \ln x} = \left((x)' \ln x + x (\ln x)' \right) e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = \left(1 \ln x + x \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x} = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$$

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \quad (8)$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) (\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{3X}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{e^x - 1}{X} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : \text{ لأن}$$

$$x = \frac{1}{X} : \text{اذن } \frac{1}{x} = X \quad \text{نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (20)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} (e^X - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow x \rightarrow 1 \quad \text{و } x = 1 - X \quad \text{يعني } 1 - x = X \quad \text{نضع } X \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \quad (22)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \quad \text{و } x = -X \quad \text{يعني } -x = X \quad \text{نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \quad (23) \quad \text{استعمال المشتقة}$$

$$f(0) = e^{0+1} = e^1 = e : \text{اذن } f(x) = e^{x+1} \quad \text{نضع}$$

$$f'(0) = e : \text{اذن } f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1e^{x+1} = e^{x+1} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$$

III. مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$

خاصية: الدالة \exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} فإن الدالة:

$$f : x \mapsto e^{u(x)}$$

و لدينا: $(\forall x \in I); f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$.

و نكتب اصطلاحاً: $(\forall x \in I); (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

و للبرهان يكفي ملاحظة أن: $f = \exp \circ u$

مثال: لنحسب مشتقة الدالة $f : x \mapsto e^{x^2-x}$

لدينا الدالة $x \mapsto x^2 - x = u$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و منه f قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R}

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (x^2 - x)' e^{x^2-x}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (2x - 1) e^{x^2-x}$$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x} \quad (4)$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

$$F(x) = e^{\cos x} : \text{اذن}$$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[\quad (5)$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$$

$$F(x) = \ln|e^x - x| : \text{اذن}$$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

تمرين 10: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها

2. حدد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 2e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty$$

$$f'(x) = (e^{2x} - 2e^x)' = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x (e^x - 1)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $e^x - 1$

$$x > 0 \Leftrightarrow x > \ln 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

$$\text{اذن} : x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \text{2}$$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x = \frac{1}{2}(2x)' e^{2x} - 2(e^x)'$$

اذن : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

تمرين 11: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية على المجال I

$$1. f(x) = e^{x^2-3x}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}; I =]0; +\infty[$$

$$3. f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{x^2-3x}, \quad I = \mathbb{R} \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f'(x) = (e^{x^2-3x})' = (x^2 - 3x)' e^{x^2-3x} = (2x - 3)e^{x^2-3x}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9)$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)' = \left(\frac{2}{(x-1)^2} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left(e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)'$$

$$f'(x) = (2(x-1)^{-2})' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = -4(x-1)^{-3} ((x-1)') e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{-4}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^4} \right) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

IV. الدوال الأصلية للدالة: $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال

الأصلية للدالة $e^{u(x)} u'(x)$ على I

هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x \mapsto e^{u(x)} + k$ حيث k عدد حقيقي

مثال: الدالة: $x \mapsto e^{\sin x}$ دالة أصلية للدالة

$$\mathbb{R} \text{ على } x \mapsto \cos x e^{\sin x}$$

تمرين 9: حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$1. I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$$

$$2. I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$3. I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$4. I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$5. I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

اذن : $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$$

اذن : $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

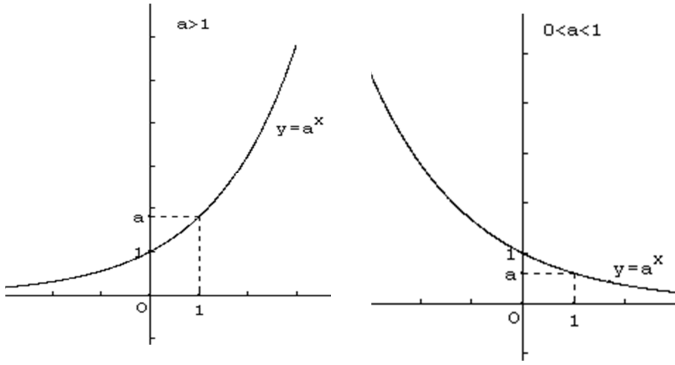
$$I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3 \quad (3)$$

$$f(x) = e^x (e^x - 1)^3 = (e^x - 1)' (e^x - 1)^3$$

$$\text{اذن} : F(x) = \frac{1}{3+1} (e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4$$

❖ إذا كان $a > 1$ فان:

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x < y)$$



تمرين 12: حل في \mathbb{R} المعادلات و المترجمات الآتية:

$$5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0 \quad (3) \quad 3^x = 12 \quad (2) \quad 2^{x+1} = 8^x \quad (1)$$

$$(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1} \quad (5) \quad 2^{x-1} > 4^x \quad (4)$$

أجوبة: (1) $2^{x+1} = 8^x$ يعني $2^{x+1} = (2^3)^x$ يعني $2^{x+1} = 2^{3x}$

يعني $x+1 = 3x$ يعني $1 = 2x$ يعني $x = \frac{1}{2}$ ومنه: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

(2) $3^x = 12$ يعني $x = \log_3 12$ ومنه: $S = \{ \log_3 12 \}$

(3) $2^x - 3 \times 2^1 \times 2^x - 16 = 0$ يعني $2^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0$

نضع: $2^x = X$ والمعادلة تصبح: $X^2 - 6X - 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 + 4 \times 1 \times 16 = 100 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1 = \frac{6+10}{2 \times 1} = 8$ و $X_2 = \frac{6-10}{2 \times 1} = -2$ يعني $X_1 = 8$ و $X_2 = -2$

$2^x = 8$ يعني $x_1 = \log_2 8$ و $2^x = -2$ ليس لها حل

$x_1 = \log_2 8 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$ يعني $x_1 = 3$

ومنه: $S = \{3\}$

(4) $2^{x-1} > 4^x$ يعني $2^{x-1} > (2^2)^x$ يعني $2^{x-1} > 2^{2x}$

يعني $x-1 > 2x$ يعني $-1 > x$

ومنه: $S =]-\infty, -1[$

(5) $(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1}$ يعني $2x < x+1$ لأن $0 < 0,5 < 1$

يعني $x < 1$ ومنه $S =]-\infty, 1[$

(3) حالة خاصة الدالة الأسية للأساس 10

❖ الدالة: $x \mapsto 10^x$ تسمى الدالة الأسية للأساس 10 و نرسم لها بالرمز \exp_{10}

و اصطلاحا بالرمز 10^x و لدينا $10^x = e^{x \ln 10}$

❖ $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall x \in]0; +\infty[); 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

حيث \log هي دالة اللوغاريتم العشري

مثال: حل في \mathbb{R} المعادلة الآتية: $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

الجواب: $100^x + 40 = 14 \times 10^x$ يعني

$$(10^2)^x - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

يعني $10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$

$$(10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}; I =]0; +\infty[\quad (2)$$

$$f'(x) = \left((x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)' = (x-1)' e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left(e^{\frac{1}{x}} \right)'$$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}(x-1) \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; I = \mathbb{R} \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = 1 - \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = 1 - \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

V. الدالة الأسية للأساس a ($a \neq 1$ و $a > 0$)

(1) تعريف: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا و مخالفا للعدد 1 الدالة الأسية للأساس a هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x

بالعدد الحقيقي $e^{x \ln a}$, و الذي يكتب a^x و نرسم لها بالرمز \exp_a , و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

(2) نتائج:

❖ لكل x من \mathbb{R} لدينا: $\ln(a^x) = x \ln a$

❖ $(\forall x \in \mathbb{R})$ و $(\forall y \in]0, +\infty[)$ $a^x = y$ يكافئ

$$x = \log_a y$$

❖ لكل x و y من \mathbb{R} لدينا: $a^x = a^y$ يكافئ $x = y$

(3) خاصيات: لكل x و y من \mathbb{R} لدينا:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \frac{1}{a^x} = a^{-x}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; (a^x)^y = a^{xy}$$

ملحوظة: هذه الخاصيات هي تمديد لخاصيات القوى الجذرية و

يمكن البرهان عليها باستعمال المتساوية $a = e^{x \ln a}$

VI. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto a^x$

(1) خاصية: الدالة $f: x \mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (\ln a) a^x$$

البرهان: لدينا: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

نضع: $u(x) = x \ln a$ و منه: $f(x) = e^{u(x)}$

لدينا u دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (دالة خطية) إذن الدالة f قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R}

و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = \ln a e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

(2) نتيجة:

❖ إذا كان $0 < a < 1$ فان:

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x > y)$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $x+1$

$$x = -1 \text{ يعني } x+1 = 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

ومنه

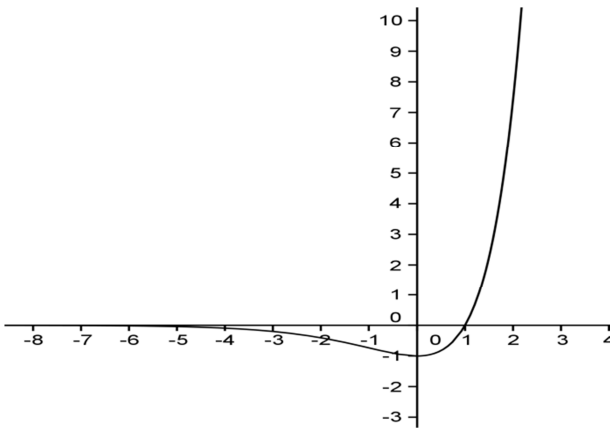
• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال: $[-1; +\infty[$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب السالبة على المجال: $]-\infty, -1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

النقطة: $A(-1, -2e^{-1})$ نقطة انعطاف ل (C_f)

(5)



مثال 2: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f الدالة المعرفة كالتالي: $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$

حدد D_f وأحسب النهايات عند محددات D_f

حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات

تحقق من أن: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

أجوبة (1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$ لأن: $e^x = -1$ ليس لها حل لأن: $e^x > 0$

ومنه: $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$$

$$f'(x) = \left(x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

نضع: $X = 10^x$ والمعادلة تصبح: $X^2 - 14X + 40 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = 4 \text{ و } X_1 = 10 \text{ يعني } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \text{ و } X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1}$$

يعني $10^{x_2} = 4$ و $10^{x_1} = 10$ يعني $x_2 = \log_{10} 4$ و $x_1 = 1$

ومنه: $S = \{1, \log_{10} 4\}$

VII. دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النيبيرية و اللوغاريتم النيبيري

مثال 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محددات D_f

2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

4. أدرس تقعر (C)

5. أنشئ المنحنى (C)

أجوبة (1) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

مبياتيا: $y = 0$ مقارب ل (C) بجوار $-\infty$

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' \quad (2)$$

$$1. f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

2. اشارة $f'(x)$ هي اشارة x

3. ومنه جدول تغيرات الدالة f

4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x \quad (3)$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجما في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

4 دراسة تقعر (C)

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$$

اشارة: $f'(x)$ هي اشارة $(e^x)^2 - e^x + 1$

نضع: $e^x = X$ والمعادلة تصبح: $X^2 - X + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه:

$$(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$$

ومنه: $f'(x) > 0$ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) نتحقق من أن: $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

(4) نعلم أن: $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$ يعني $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

اذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$ ومنه:

$y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا: $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$ اذن (C_f) فوق $y = x - 1$ (Δ)

نعلم أن: $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$ يعني

$$f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$ ومنه:

$y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا: $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$ اذن (C_f) تحت $(D) y = x + 2$

تمرين 13: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. بين أن لكل x من \mathbb{R}^+ : $f(x) = \frac{e^x - 4}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

4. بين أن لكل x من \mathbb{R}^+ : $f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

7. أحسب $f(2 \ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

أجوبة: (1) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x} = \frac{(e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})^2}{x\sqrt{e^x - 1}} \quad (2)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{x\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \quad (3)$$

نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 4 = -3$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$

اذن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$

مبيانيا منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأرتاب في النقطة $A(0; f(0))$ وموجه نحو الأسفل:

4) بين أن لكل x من \mathbb{R}^+ : $f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

$$f'(x) = \left((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \right)' = (e^x - 4)' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) (\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + \frac{e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{e^x - 1})^2 + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) اشارة $f'(x)$ هي اشارة $e^x - 2$ لأن: $\frac{3e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0$ لكل x من \mathbb{R}^+

$e^x - 2 > 0$ يعني $e^x > 2$ يعني $x > \ln 2$

$$f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 4)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2 - 4)\sqrt{2 - 1} = -2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} - e^x \frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} = \frac{2e^x(1-e^{2x}) + 2e^x e^{2x}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2e^{3x} + 2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} = \frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} > 0$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[$$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$+\infty$

(3) f تزايدية قطعاً على المجال $I =]-\infty, 0[$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J = f(I) = f(]-\infty, 0[) =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} = x^2 \text{ يعني } \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} \right)^2 = x^2 \text{ يعني } \begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} = x \\ y \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

$$e^{2y} = x^2 - x^2 e^{2y} \text{ يعني } e^{2y} = x^2 (1 - e^{2y})$$

$$e^{2y} + x^2 e^{2y} = x^2 \text{ يعني}$$

$$e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2} \text{ يعني } e^{2y} (1+x^2) = x^2 \text{ يعني}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \text{ يعني } 2y = \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \text{ يعني}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad y = \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ يعني}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

تمرين 15: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم

$$\cdot \|\vec{i}\| = 2cm \text{ حيث } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة

المحصل عنها؟

$$\text{ب. بين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(2) أ. بين أن $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} \right) \sqrt{e^x - 1} \quad (6)$$

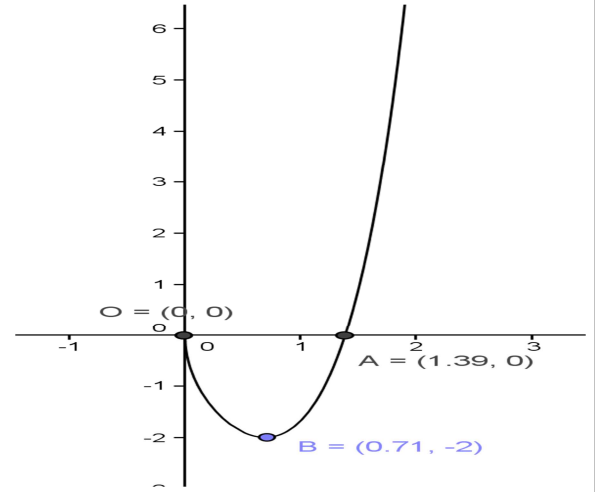
نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنه (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه

محور الأرتايب بجوار $+\infty$ (7)

$$f(\ln 2) = (e^{2 \ln 2} - 4) \sqrt{e^{2 \ln 2} - 1} = (e^{\ln 4} - 4) \sqrt{e^{\ln 4} - 1} = (4 - 4) \sqrt{4 - 1} = 0$$



تمرين 14: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1. حدد D_f وأحسب النهايات عند محددات D_f

2. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها

3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

4. حدد $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

$$\text{أجوبة: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$$

$$e^0 > e^{2x} \text{ يعني } 1 > e^{2x} \text{ يعني } 1 - e^{2x} > 0$$

$$\text{يعني } 0 > 2x \text{ يعني } x < 0$$

$$\text{ومنه: } D_f =]-\infty, 0[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0^+ \text{ لأن:}$$

اذن : $e^x + 1 > 1$ اذن : $\ln(e^x + 1) > \ln 1$ اذن :

$$\ln(e^x + 1) > 0$$

اذن : $-\ln(e^x + 1) < 0$ وبالتالي : اذن (C_f) تحت $y = x + 1$

(D)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ نبين أن } \text{????}$$

$$f'(x) = (x+1 - \ln(1+e^x))' = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} > 0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	1

ج . دراسة تقعر المنحنى (C) .

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^x} \right)' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب السالبة على \mathbb{R} ,

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها x_0 ???

نحل المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $1 - \ln(1+e^{-x}) = 0$

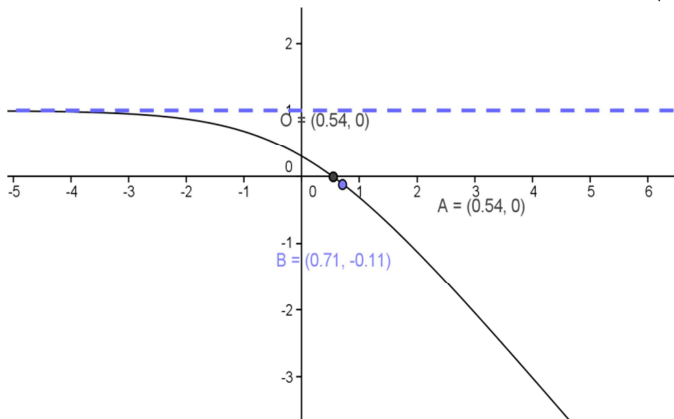
يعني $\ln(1+e^{-x}) = \ln e$ يعني $\ln(1+e^{-x}) = 1$

يعني $1+e^{-x} = e$ يعني $e^{-x} = e - 1$ يعني $-x = \ln(e-1)$

يعني $x = -\ln(e-1)$ ومنه النقطة أفصولها هو :

$$x_0 = -\ln(e-1)$$

(4)



(5) أ . بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

$$(3) \text{ أ . بين أن } \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

(4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O; i, j)$.

(5) أ . بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

$$f(x) = 1 - \ln(1+e^{-x}) \text{ : الأجوبة}$$

(1) أ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1+e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

التأويل الهندسي : $y = 0$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

$$\text{ب . } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

(2) أ . نبين أن $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1 - \ln(1+e^x)$.

$$f(x) = 1 - \ln(1+e^{-x}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1 - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) = 1 - \ln(e^x + 1) + x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1) \text{ : ومنه}$$

ب . وجدنا أن : $f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1)$ اذن :

$$f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\ln(e^x + 1) = 0$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$ وبالتالي :

لمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) . ???

ندرس إشارة : $f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

f تزايدية قطعاً على المجال \mathbb{R} ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty; 1[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$1 - x = \ln(1 + e^{-y}) \text{ يعني } \begin{cases} 1 - \ln(1 + e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$1 + e^{-y} = e^{1-x} \text{ يعني}$$

$$-y = \ln(e^{1-x} - 1) \text{ يعني } e^{-y} = e^{1-x} - 1$$

$$y = -\ln(e^{1-x} - 1) \text{ يعني}$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x} - 1)$$

تمرين 16BIS:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = 3 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم

$$\cdot \|\vec{i}\| = 2cm \text{ حيث } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ما هو التأويل الهندسي

للنتائج المحصل عنها ؟

(2) أ. بين أن $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 3 - \ln(1 + e^x)$

ب. استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب

مائل بجوار $-\infty$.

ج. حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

(3) أ. بين أن $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج. ادرس تقعر المنحنى (C) .

د. بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفضولها x_0 .

(4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(5) أ. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب. أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .