

الدوال الأسية

السلسلة 1

التمرين الأول :

في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المباني في معلم متعدد منظم (\vec{i}, \vec{j}) لدالة عديمة f معرفة وقابلة للاشتغال على \mathbb{R}^* .
عُلِّمَ أن (C_f) يقبل :

- فرعاً شلجمياً باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$
- محور الأراتيب مقارباً عمودياً
- المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارباً مانلا بجوار $+\infty$

(أنظر الشكل)

من خلال قراءتك للمبيان :
1. أ. حدد النهايات التالية :

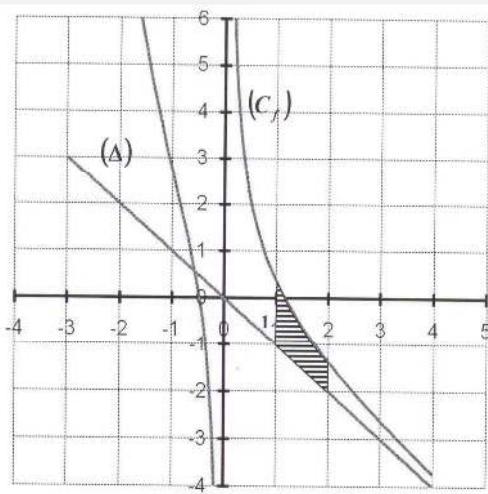
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

ب. اعط جدول تغيرات f على مجموعة تعريفها

ج. اعط إشارة $f(x) + x$ على المجال $[0, +\infty]$

د. اعط عدد حلول المعادلة $f(x) = -x$ على \mathbb{R}^*

2. أحسب مساحة الحيز المذكور في المبيان إذا علمت أن $f(x) = e^{-x} - x + \frac{1}{x}$ لكل x من \mathbb{R}^*



التمرين الثاني :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

(1) أحسب $(g'(x))$ لكل x من \mathbb{R} ثم اعط جدول تغيرات الدالة

(2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (يمكنك وضع $t = -x$)

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقايرب مايل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

(4) أ- بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R}

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f

(5) أدرس تغير المنحنى (C_f) محددا نقط انعطافه

(6) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أقصولها 0

ب- أنشئ (T) و (C_f) (نأخذ $e^{-1} \simeq 0,36$)

(7) أ- باستعمال متكاملة بالأجزاء ، أحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللذين معادلاتها : $y = x - 1$ و $y = 0$ و $x = 2$ و $x = 0$

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

(1) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N}

(2) بين أن المتتالية (u_n) تنقصصية

(3) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

1) حدد D_f

2) أحسب نهايّات f عند محدّات D_f

3) أدرس تغييرات f و اعط جدول تغييراتها

4) أدرس الفروع الانهائّية للمنحنى (C_f)

5) بين أن النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

6) أنشئ (C_f)

7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $x = 1$ و $x = \ln 2$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العدديّة f المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. ولتكن (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f في معلم متّعّم منظّم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة القياس 4cm)

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x + 2 - e^x$

1) أدرس تغييرات g على $[0, +\infty]$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α في $[0, +\infty]$

ب- تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$

3) أدرس إشارة g على $[0, +\infty]$

الجزء الثاني

1) أ- بين أن لكل x من $[0, +\infty]$ $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

ب- استنتج تغييرات f على $[0, +\infty]$

2) أ- بين أن لكل $x \geq 0$ $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أول هندسيّة النتيجة

3) أ- بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

ب- اعط تطبيقاً لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}

4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأقصول 0

- 5) أ- بين أن لكل x من $[0, +\infty)$ حيث $f(x) = e^x - xe^x - 1$: $\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$
 ب- أدرس تغيرات الدالة u على $[0, +\infty)$ و استنتج إشارة $(u(x))$ على $[0, +\infty)$
 ج- أدرس الوضع النسبي ل (T) و (C_f)
 (6) أنشئ (C_f) و (T)

الجزء الثالث

- (1) حدد دالة أصلية ل f على $[0, +\infty)$ (يمكنك استعمال الجزء الثاني للسؤال 2)
 (2) نرمز ب \mathcal{D} الحيز المحصور بين (T) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتها $x=0$ و $x=1$
 أحسب ب cm^2 المساحة \mathcal{A} للحيز \mathcal{D}
 (3) لكل n من N ، نضع $v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$
 أ- أحسب v_0 ، v_1 و v_2
 ب- أول هندسيا v_n
 ج- بين أن لكل $n \geq 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx$

التمرين الخامس :

- I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 2) أ- أحسب $(g'(x))$ لكل x من \mathbb{R}
 ب- أدرس تغيرات g و استنتاج أن $g'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}
- II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (الوحدة $2cm$)
 1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه بجوار $+\infty$
 ب- أحسب $(f'(x))$ ثم بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$
 ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)
 2) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ لكل x من \mathbb{R} و استنتاج أن f تزايدية قطعا على \mathbb{R}
 3) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $[-1, 0]$ بحيث $f(\alpha) = 0$
 ب- حدد معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0.

ج- بين أن : $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$ لكل x من \mathbb{R} ثم حدد زوج إحداثي I نقطة انعطاف المنحني (C_f)

(4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $2e^{-2} \approx 0,27$)

(5) باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن :

$$\int_0^2 xe^{-x} dx = 1 - \frac{3}{e^2}$$

(6) احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين

$x = 2$ و $x = 0$