الـــــدوال الأصليـــــة

1- تعريـف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.
ولكل x من I : $F'(x) = f(x)$

مثـــال :

1- لتكن $F(x) = x^2 + x + 1$
إذن : $F'(x) = 2x + 1$
إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$

2- حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

a- $f(x) = 2$

$F(x) = 2x + C \ / \ C \in \mathbb{R}$

b- $f(x) = x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

c- $f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$

d- $f(x) = x^n \ / \ n \in \mathbb{N}^*$

$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

e- $f(x) = x^r \ ; \ r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$

$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

f- $f(x) = \sqrt{x}$

$= x^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{Cte}$

g- $f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x)$

$F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + \text{Cte}$

$u^r \cdot u'$: الأصليــة $\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$

2- خاصية :

لتكن f دالة عددية.
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هي :
$F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

برهان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.
لدينا : $(F + \lambda)' = F' = f$
إذن : $F + \lambda$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على I .
ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي $F + \lambda$.

3- خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I.
ليكن x_0 من I و y_0 عنصر حقيقي $y_0 \in \mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .
حيث : $F(x_0) = y_0$

أمثلة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$.

-1 $f(x) = x + 1$ $\quad$ $F(2) = 1$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

وبما أن : $F(2) = 1$

فإن : $\frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$

$2 + 2 + C = 1$

ومنه : $C = -3$

-2 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ $\quad$ $F(0) = 0$

لدينا : $F(x) = 2\ Arc\tan x + C$

وبما أن : $F(0) = 0$

فإن : $C = 0$

إذن : $F(x) = 2\ Arc\tan x$

-3 $f(x) = \cos 2x$ $\quad$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

وبما أن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

فإن : $C = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

4- خـاصيــة :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .

و G دالة أصلية للدالة g على I .

فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

5- خـاصيــة :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحظـة وخـاصيـــة :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ

حيث : $F - G = \lambda$

6- جـدول الـدوال الأصليـة الاعتياديــة :

الدالــة f	الدالــة F (الأصليــة)	مـلاحظــات
1	$x+C$	$C \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+C$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$n \in \mathbb{N}$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$	$r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$
$u^n \cdot u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	$n \in \mathbb{N}$
$u^r \cdot u'$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C$	$r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$Arc\tan x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$a \neq 0$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$	$a \neq 0$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

تطبيقـــات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

-1 $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

إذن : $$F(x) = x - 2\,Arc\tan x + C$$

-2 $$f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

لدينا : $$f(x) = \frac{1}{2}\,2x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}(2x)$$

ومنه : $$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

إذن : $$F(x) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2 + 1}^{\,4}$$

-3 $$f(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 3}$$

$$= \left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{3}{2}}$$

-4 $$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x$$

-5 لدينا : $$f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2 + 1\right)^2}\,x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{2}{3}} 2x$$

إذن :

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{10}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$