التمرين الأول

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ $\qquad$ $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k}$ و $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

1) أحسب التكامل I_0

2) بين أن $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{1+n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و أن $I_n = (-1)^n \left(I_0 + s_n\right)$

3) بين أن $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} s_n$

التمرين الثاني

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب I_1

2) بين أن $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$ $\quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

3) استنتج أن $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n n!} + I_n$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

4) بين أن $0 \le I_n \le \frac{K}{2^n n!}$ $(\exists K \in \mathbb{R})$ و استنتج نهاية المتتالية $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k\ k!}$

التمرين الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n} \ln(n+k)\right) - \ln(n)$

1) بين أن $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

2) أ- أن من أجل $0 \le k \le n-1$ بين أن $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

أ- استنتج أن : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\,dx \le u_n$

ب- استنتج تأطير ل u_n ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع

1) أحسب التكامل $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ (ضع $t = \frac{1}{x}$)

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

3) حدد نهاية المتتالية $U_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\ n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ (يمكن دراسة المتتالية $V_n = \ln U_n$)

التمرين الخامس

حدد نهاية المتتاليات التالية : 1) $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ $\qquad$ 2) $U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k\ 1}^{k=n} \sqrt{k}$ $\qquad$ 3) $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k e^{\frac{k}{n}}$