التمرين الأول

أحسب التكاملات التالية : $\int_{1}^{2}\frac{2x-1}{\left(3x^2-3x+1\right)^2}dx$ ، $\int_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ ، $\int_{\pi^2}^{1}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 x\;dx$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(tx)\,dt$ حيث $x\in\mathbb{R}^*$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\;dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos 3x\;dx$ ، $\int_{0}^{1}\frac{x^4}{x^2+1}dx$ ، $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+2x+4}dx$ ، $\int_{0}^{1}\frac{4t}{\left(t^2+1\right)(t+1)^2}\,dt$

التمرين الثاني

نعتبر التكامل التاليين : $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin 2x\;dx$ و $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos^2 x\;dx$

1) أحسب كل من التكاملين $I-J$ و $I+J$

2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين الثالث

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي : $\int_{1}^{\sqrt{3}}x\arctan x\;dx$ ، $\int_{0}^{\pi}x\sin x\;dx$ ، $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\arctan x}{x^3}\,dx$

$\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ (أحسب مشتقة الدالة $x\to\frac{1}{1+x^2}$)

التمرين الرابع

باستعمال مكاملة بتغيير المتغير حدد التكاملات التالية : $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ ضع $x=\sqrt{t^2+1}$

$\int_{0}^{3}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$ ضع $t=\sqrt{x}$ ، $\int_{1}^{4}\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\,dx$ ضع $t=\sqrt{x}+1$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$ ضع $t=\tan\frac{x}{2}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin 2x}$ ضع $t=\tan x$ ، $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\;dx$ ضع $x=2\sin t$

التمرين الخامس

نعتبر التكامل $W_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\;dx$ لكل عدد طبيعي n

1) أحسب W_0 ; W_1

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\;\; W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$ ثم استنتج $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\;dx$ و $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\;dx$

ب- أحسب W_{2n} بدلالة n

3) بين أن المتتالية $(W_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

4) بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1$

5) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\;\; (n+1)W_{n+1}W_n=\frac{\pi}{2}$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n}\,W_n=\sqrt{\pi}$