الحساب التكاملي

تمرين1

احسب ما يلي :

-1 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx$ -2 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx$

-3 $I=\int_1^{e}\frac{1}{x}dx$ -4 $I=\int_0^{1}e^{x}dx$

-5 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\,dx$ ($\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$)

-6 $I=\int_2^{4}3x\,dx$ -7 $I=\int_2^{3}\left(3x^2+x-1\right)dx$

-8 $I=\int_0^{1}\frac{1}{3x+1}dx$ -9 $I=\int_0^{1}\sqrt[3]{x^5}$

-10 $I=\int_0^{1}\frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$ ($(\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$)

-11 $I=\int_0^{1}6xe^{3x^2+1}dx$ -12 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,e^{\sin x}dx$

- 13 $I=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$ -14 $I=\int_1^{e}\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$

-15 $I=\int_1^{e}\frac{\ln^3 x}{x}dx$ -16 $I=\int_1^{e}\frac{3x^3+1}{x}dx$

-17 $I=\int_0^{e-1}\frac{3x}{x+1}dx$ -18 $I=\int_3^{4}\frac{x-6}{x^2-4}dx$

(تحقق أن : $\frac{x-6}{x^2-4}=\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$)

تمرين2

احسب : -1 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ -2 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

-3 $\int_1^{e}x\ln x\,dx$ -4 $F(x)=\int_e^{x}\ln t\,dt$

تمرين3

احسب :

-1 $I=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$ $\left(t=e^{x}\right)$

- 2 $I=\int_1^{e}\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$ $\left(t=\ln x\right)$

-3 $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ $\left(t=\frac{1}{x}\right)$

-4 $I=\int_{2\sqrt{3}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ $\left(x=\frac{1}{\sin t}\right)$

تمرين4

-1 $f(x)=\sin x$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f و المستقيمين

$x=0$ و $x=2\pi$

- 2 $f(x)=x^2-4$

$A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_f و المستقيمين

$x=2$ و $x=8$

$f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$

-3 حدد $A(\Delta)$ مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g

و المستقيمين $x=-1$ و $x=3$

تمرين5

-1 $f:[0;2]\to\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=x^2$

أ- احسب V_C حجم مجسم الدوران C المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأفاصيل .

أ- احسب V'_C حجم مجسم الدوران C' المحصل عليه بدوران C_f حول محور الأراتيب .

-2 احسب V_C حجم المجسم C

$C=\left\{M(x;y)\in(P)/0\le x\le\frac{\pi}{3};0\le y\le 1+\cos 3x\right\}$

تمرين6

-1 حدد إشارة $I=\int_2^{3}\frac{x-1}{x+1}dx$ بدون حساب I

-2 أطر $I=\int_2^{3}\frac{x-1}{x+1}dx$ بدون حساب I

-3 حدد القيمة المتوسطة ل : $f(x)=\sqrt{x}$ على $[1;4]$

تمرين7

$I_n=\int_0^{1}x^{n}\sqrt{1-x}\,dx$

-1 باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد علاقة بين: I_n و I_{n-1}

-2 احسب I_0 ثم احسب I_n بدلالة n

الحل

$$I_n=\int_0^1 \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx \qquad v'=\sqrt{1-x}=\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)'$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1 nx^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 nx^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx-\frac{2}{3}\int_0^1 nx^{n}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_n=\frac{2}{3}nI_{n-1}-\frac{2}{3}nI_n$$

إذن : $\boxed{I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}}$

-2

$$I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

إذن : $\boxed{I_0=\frac{2}{3}}$

$$I_n=\frac{2n}{2n+3}\times\frac{2(n-1)}{2(n-1)+3}\times\cdots\times\frac{2(n-k)}{2(n-k)+3}I_{n-(k+1)}$$

$k=n-1$

$$I_n=\frac{2n}{2n+3}\times\frac{2(n-1)}{2(n-1)+3}\times\cdots\times\frac{2\times1}{2\times1+3}I_0$$

$$I_n=\frac{2n}{2n+3}\times\frac{2(n-1)}{2(n-1)+3}\times\cdots\times\frac{2\times1}{2\times1+3}\times\frac{2}{3}$$

إذن : $\boxed{I_n=\frac{2^{n+1}\times n!}{3\times5\times\cdots\times(2n+3)}}$

$$A_n=3\times5\times\cdots\times(2n+3)$$

$$=\frac{2\times3\times4\times5\times\cdots\times(2n+2)\times(2n+3)}{2\times4\times\cdots\times(2n+2)}$$

$$=\frac{(2n+3)!}{2\times1\times2\times2\times\cdots\times2\times(n+1)}$$

$$\boxed{3\times5\times\cdots\times(2n+3)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!}}$$

$$I_n=2^{n+1}\times n!\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$\boxed{I_n=\frac{2^{2(n+1)}(n+1)!\times n!}{(2n+3)!}}$$

تمرين8

$$u_n=\int_n^{n+1}e^{(1-x)}dx$$

أ - أول هندسيا u_n

ب- حدد u_n بدلالة n ثم استنتج أن (u_n) هندسية متقاربة

ج- $A_n=u_0+\cdots\cdots+u_n$

حدد A_n بدلالة n ثم بين أن A_n متقاربة

احسب : $\lim A_n$

تمرين9

احسب : 1- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$

2- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\cos^2x\,dx$ 3 - $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin3x\cos5x\,dx$

4- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\cos^2x}dx$ 5- $I=\int_1^3\frac{x}{x^2+2x+3}dx$

الحل

1- $\sin^5 x=-\frac{1}{16}(\sin5x-5\sin3x+10\sin x)$

2- $\sin^3x\cos^2x=-\frac{1}{16}(\sin5x-\sin3x-2\sin x)$

3- $\cos(a)\sin(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$

4- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\tan'(x)dx$

مكاملة بالأجزاء ثم : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(x)dx=-\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

-5

$$I=\int_1^3\frac{x}{x^2+2x+3}dx \qquad t=\frac{1}{2}(x+1)$$

$$=\frac{1}{4}\times\int_1^3\frac{x}{\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2+1}dx \qquad dt=\frac{1}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\int_1^2\frac{2t-1}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\int_1^2\frac{2t}{t^2+1}dt-\int_1^2\frac{1}{t^2+1}dt\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\times\left(\left[\ln(t^2+1)\right]_1^2-\left[\arctan(t)\right]_1^2\right)$$

تمرين 10

1- احسب : $I=\int_{-\ln 2}^{0}\frac{1}{1+2e^{x}}dx$

2- باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب :

$$J=\int_{-\ln 2}^{0}e^{-x}\ln\left(1+2e^{x}\right)dx$$

الحل

-1

$$I=\int_{-\ln 2}^{0}\frac{1}{1+2e^{x}}dx \quad t=e^{x}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t\left(1+2t\right)}dt \qquad dt=tdx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+2t}\right)dt$$

$$=\left[\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-2\left[\ln\left(1+2t\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$\boxed{I=\ln\frac{8}{9}}$$

-2

$$J=\int_{-\ln 2}^{0}\underbrace{e^{-x}}_{u'}\underbrace{\ln\left(1+2e^{x}\right)}_{v}dx$$

تمرين 11

$$A=\int_{0}^{1}\left(2+\cos x\right)e^{1-x}dx$$

1- بين أن : $A=2e-2+\int_{0}^{1}\cos x\cdot e^{1-x}dx$

2- نضع : $I=\int_{0}^{1}\cos x\cdot e^{1-x}dx$ و $J=\int_{0}^{1}\sin x\cdot e^{1-x}dx$

باستعمال مكاملة بالأجزاء

بين أن : $I=-\cos(1)+e-J \;;\; J=\sin(1)+I$

3- احسب : A

تمرين 12

f متصلة على مجال $[-a;a]$ $(a>0)$

1- بين أن : $\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=\int_{0}^{a}\left(f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right)dx$

2- بين أن إذا كانت f فردية فإن : $\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=0$

3- بين أن إذا كانت f زوجية فإن : $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

استنتج أن : $I=\int_{-1}^{1}\left(2+\cos x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=0$

تمرين 13

f متصلة و زوجية على مجال $[-a;a]$ $(a\neq 1\;;\;a>0)$

بين أن : $\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx$

استنتج : $J=\int_{-1}^{1}\frac{3x^{2}+1+e^{x}}{e^{x}+1}dx$

الحل

-1

$$\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}\left(\frac{f\left(x\right)}{1+e^{x}}+\frac{f\left(-x\right)}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$=\int_{0}^{a}f\left(x\right)\left(\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx}$$

-2

$$J=\int_{-1}^{1}\frac{3x^{2}+1+e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{3x^{2}+1}{e^{x}+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(3x^{2}+1\right)dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

$$=\left[x^{3}+x\right]_{0}^{1}+\left[\ln\left(e^{x}+1\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{I=1+\ln\left(\frac{e+1}{e^{-1}+1}\right)}$$

تذكير:

إذا كان : g متصلة على مجال $[a;b]$

و $v\left(x\right);u\left(x\right)$ قابلتان للإشتقاق على مجال I

و $v\left(I\right)\subset\left[a;b\right];u\left(I\right)\subset\left[a;b\right]$

و: $f\left(x\right)=\int_{u\left(x\right)}^{v\left(x\right)}g\left(t\right)dt$

فإن : f قابلة للإشتقاق على المجال I

و $f'\left(x\right)=v'\left(x\right)g\left(v\left(x\right)\right)-u'\left(x\right)g\left(u\left(x\right)\right)$

تمرين 14

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\int_{x}^{2x}\ln\left(e^{t}-1\right)dt & x\in\mathbb{R}_{+}^{*} \\ f\left(0\right)=0 \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_{+}^{*}$

2- نعتبر : $g(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ $\quad x\in\mathbb{R}_+^*$

أ- ادرس رتابة g

ب- استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

ج- بين أن f متصلة في 0 على اليمين

د- ادرس اشتقاق f في 0 على اليمين

هـ - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

الحل

نعتبر : $u(x)=x$; $v(x)=x^2$ $\quad x\in\mathbb{R}_+^*$

$$g(x)=\ln\left(e^x-1\right) \qquad x\in\mathbb{R}_+^*$$

1- لنبين أن : f متصلة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : g متصلة على $\mathbb{R}_+^*$

و $u(x)\,;v(x)$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

و $u\left(\mathbb{R}_+^*\right)\subset\mathbb{R}_+^*\,;v\left(\mathbb{R}_+^*\right)\subset\mathbb{R}_+^*$

إذن : f متصلة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

2- أ- رتابة g

$$g'(x)=\frac{e^x}{e^x-1} \qquad x\in\mathbb{R}_+^*$$

بما أن : $x>0$ فإن : $e^x-1>0$

إذن : g تزايدية قطعا

ب- نستنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

لدينا : $x\le t\le 2x$

بما أن : g تزايدية فإن : $g(x)\le g(t)\le g(2x)$

و بما أن : $x<2x$

فإن : $\int_x^{2x} g(x)dt\le\int_x^{2x} g(t)dt\le\int_x^{2x} g(2x)dt$

و منه : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)}$

ج- لنبين أن : f متصلة في 0 على اليمين

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+} xg(x)\le\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\le\lim\limits_{x\to0^+} xg(2x)$

$$\lim_{x\to0^+} xg(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln\left(e^x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-1}\times\lim_{x\to0^+}\left(e^x-1\right)\ln\left(e^x-1\right)$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(e^x-1\right)\ln\left(e^x-1\right)=\lim_{t\to0^+} t\ln(t)=0$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}}=1$$
$$\lim_{x\to0^+} xg(x)=1\times0$$
$$\boxed{\lim_{x\to0^+} xg(x)=0}$$
$$\lim_{x\to0^+} xg(2x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} 2xg(2x)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+} tg(t)$$
$$\boxed{\lim_{x\to0^+} xg(2x)=0}$$

و منه : $0\le\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\le0$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0}$

و بما أن : $f(0)=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

إذن : f متصلة في 0 على اليمين

د- اشتقاق f في 0 على اليمين

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)\le\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\lim\limits_{x\to0^+} g(2x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} g(2x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(e^{2x}-1\right)$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} g(2x)=-\infty}$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\lim\limits_{x\to0^+} g(2x)$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty}$

إذن : اشتقاق f غير قابلة للإشتقاق في 0 على اليمين

و : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل يمين النقطة ذات الأفصول 0

هـ - حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)\le \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le \lim\limits_{x\to+\infty} xg(2x)$

$$\lim_{x\to+\infty} xg(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(e^{x}-1\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} xg(x)=+\infty}$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)\le \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: xg(x)\le f(x)\le xg(2x)$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\le \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}\le \lim\limits_{x\to+\infty} g(2x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{x}-1\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\le \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty}$

تمرين 15

احسب $\lim u_n$ في كل حالة

-1 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

-2 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

-3 $u_n=n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}$

-4 $u_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}$

الحل

-1 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{n+k}{n}}$$
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

نعتبر : $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad x\in[1;2]$

إذن : $u_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

و منه :
$$\lim u_n=\int_1^2 f(x)\,dx$$
$$=\left[\ln x\right]_1^2$$
$$\boxed{\lim u_n=\ln 2}$$

2 - $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

نعتبر : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad x\in[1;2]$

إذن : $u_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

و منه :
$$\lim u_n=\int_1^2 f(x)\,dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}\right]_1^2$$
$$\boxed{\lim u_n=2\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

-3 $u_n=n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}$

$$u_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{n^2+k^2}{n^2}}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

نعتبر : $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad x\in[0;1]$

إذن : $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

و منه :
$$\lim u_n=\int_0^1 f(x)dx$$
$$=[\arctan x]_0^1$$
$$\boxed{\lim u_n=\frac{\pi}{4}}$$

-4 $u_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$

$$\ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

نعتبر : $f(x)=\ln(1+x)\quad x\in[0;1]$

إذن : $\ln u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\lim\ln u_n=\int_0^1 f(x)dx$$

و منه :
$$=\int_0^1\ln(1+x)dx$$
$$=[(1+x)\ln(1+x)-x]_0^1$$
$$\boxed{\lim\ln u_n=2\ln 2-1}$$

بما أن : e^x متصلة على $2\ln 2-1$

فإن : $\lim e^{\ln u_n}=e^{2\ln 2-1}$

و منه : $\boxed{\lim u_n=\frac{4}{e}}$