رياضيات النجاح	الدوال الأصلية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

لدينا : $f(x)=\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}+(2x+1)^4=-3\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)+x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times 2(2x+1)^4$

منه : $F(x)=-3\times\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(2x+1)^5$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{-3}{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{10}(2x+1)^5}$

لدينا : $f(x)=x\sqrt{x}=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}+1}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{-(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{x^2+x+1}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+1+1}=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=\text{Arctan}(x+1)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}=\frac{1}{2}\frac{(3+x^2)'}{\sqrt{3+x^2}}$ منه : $\boxed{F(x)=\sqrt{3+x^2}}$

لدينا : $f(x)=\frac{\text{Arctan}\,x}{1+x^2}=\text{Arctan}\,x\times\frac{1}{1+x^2}=\text{Arctan}\,x\times(\text{Arctan}\,x)'$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}(\text{Arctan}\,x)^2}$

لدينا :

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times\sin^2(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times\left(1-\cos^2(x)\right)=\sin(5x+1)+\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)$$

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)+\cos^2(x)\times(\cos(x))'$$

منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{5}\cos(5x+1)-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{2}{2\sqrt{x}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}+2\sqrt{x}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\times(x^2+1)'$ منه : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}$ منه : $\boxed{F(x)=2\,\text{Arctan}(\sqrt{x})}$

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=x-\text{Arctan}(x)}$

لدينا : $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{1+\sqrt{x}}\times(\sqrt{x})'$

منه : $F(x)=2\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

تمرين 2 : $f(x)=x\sqrt{x+1}$:

1 لدينا : $\forall x\in[-1;+\infty[\quad (x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}=f(x)$

2 بما أن : $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}$ فإن الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل:

$$F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}(x+1)^{1+\frac{3}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x+1)^{1+\frac{1}{2}}+\lambda \ / \lambda\in IR$$

منه : $F(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\lambda$

و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0، إذن $F_0(0)=0$ منه: $\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\lambda=0$

منه : $\lambda=\frac{-2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$ بالتالي : $\boxed{F_0(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{4}{15}}$

تمرين 3 : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1 لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2=\frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

منه : $\boxed{a=1 \text{ و } b=-2}$

2 الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل: $F(x)=Arctan\,x+\frac{1}{x^2+1}+\lambda \ / \lambda\in IR$

و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $\lim\limits_{x\to+\infty}F_0(x)=0$

منه : $\frac{\pi}{2}+0+\lambda=0$ منه : $\lambda=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي : $\boxed{F_0(x)=Arctan\,x+\frac{1}{x^2+1}-\frac{\pi}{2}}$

تمرين 4 : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، F الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم في 0

1 نعتبر الدالة العددية h المعرفة على IR بما يلي : $h(x)=F(x)-\frac{1}{2}x^2$

لدينا : $\forall x\in IR \quad h'(x)=f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x$

ويما أن : $x^2+1>x^2$ فإن : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ أي : $\sqrt{x^2+1}>|x|$ وحيث أن : $\forall x\in IR\ |x|\geq x$

فإن : $\sqrt{x^2+1}>x$ ، مايعني أن : h تزايدية قطعا على IR

بالتالي : $x\geq0 \Rightarrow h(x)\geq h(0)=0$ بالتالي : $F(x)\geq\frac{1}{2}x^2 \quad \forall x\in[0,+\infty[$

2 بما أن : $F(x)\geq\frac{1}{2}x^2 \quad \forall x\in[0,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

ويما أن : $\frac{F(x)}{x}\geq\frac{1}{2}x \quad \forall x\in[0,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$

و هذا يعني أن منحنى الدالة F يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب.

3 نعتبر الدالة العددية p المعرفة على IR بما يلي : $p(x)=F(-x)+F(x)$ ، لدينا :

$\forall x\in IR \quad p'(x)=(F(-x))'+(F(x))'=-F'(-x)+F'(x)=-f(-x)+f(x)=-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}=0$

إذن: p دالة ثابتة، إذن : $\exists C\in IR \ / \ \forall x\in IR \ p(x)=C$ منه : $\forall x\in IR \ F(-x)+F(x)=C$

منه : $F(0)+F(0)=C$ إذن : $C=0$ و بالتالي : $\forall x\in IR \ F(-x)=-F(x)$

وحيث أن : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ فإن F دالة فردية.

4	بما أن: $\forall x\in IR\ F'(x)=f(x)>0$ فإن F تزايدية قطعا على IR.	
5	معادلة مماس الدالة F في الصفر هي: $(\Delta):\ y=F'(0)(x-0)+F(0)$ أي: $(\Delta):\ y=f(0)x=x$	
6	لدينا: $\forall x\in IR\ F''(x)=f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و حيث أن الشمتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها فقط في الصفر، فنقطة انعطاف منحنى الدالة F هي النقطة $O(0,0)$	
7