الدوال اللوغارتمية

السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

الجزء الأول

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2x^3-1+2\ln(x)$

1) أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$
2) بين أنه يوجد على α وحيد من $]0,+\infty[$ بحيث $g(\alpha)=0$
3) أدرس إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفروع اللانهائية ل (C_f)
2) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x$
3) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات f
4) أنشئ (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$)

الجزء الثالث

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=n$

1) بين أن مساحة هذا الحيز ب cm^2 هي : $I_n=2\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
3) استنتج تعبير I_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين 2 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $]-1,+\infty[$ **بما يلي :** $f(x)=1+\ln(1+x)$

و ليكن (C_f) **منحناها في معلم متعامد** $(O,\vec{i},\vec{j})$. **و** (D) **المستقيم ذي المعادلة** $y=x$.

1) **أ. أدرس تغيرات** f

ب. أحسب نهايات f **عند محدات** D_f

2) **نعتبر الدالة** g **المعرفة على** $]-1,+\infty[$ **بما يلي :** $g(x)=f(x)-x$

أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$

ب. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ **و استنتج** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ج. أدرس تغيرات g **ثم ضع جدول تغيراتها**

د. بين أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل بالضبط حلين** α **و** β **حيث** $\alpha\le 0$ **و** $2\le\beta\le 3$

ه. أدرس إشارة $g(x)$ **و استنتج الوضع النسبي ل** (C_f) **و** (D)

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ **المعرفة بما يلي :**

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1) **بين أن :** $2\le u_n\le\beta$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

2) **هل** $(u_n)_n$ **متقاربة ؟ علل جوابك**

التمرين 3 :

الجزء الأول

لتكن U **الدالة العددية المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $U(x)=\ln(x)+x-3$

1) **بين أن** U **تزايدية قطعا على** $]0,+\infty[$

2) **بين أن المعادلة** $U(x)=0$ **تقبل حلا و حيدا** α **في المجال** $]0,+\infty[$ **ثم تحقق أن** $2<\alpha<3$

3) **إستنتج إشارة** $U(x)$ **على** $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f **الدالة العددية المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

2) أ- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{U(x)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $]0,+\infty[$

<u>الجزء الثالث</u>

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(x)$

ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

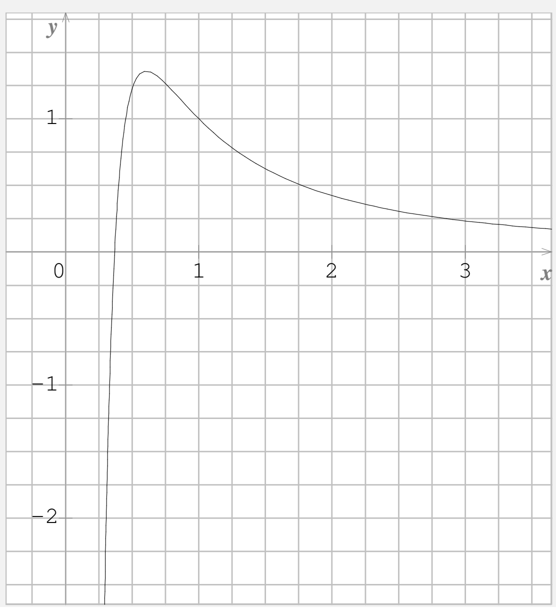
1) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$ و استنتج أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة يتم تحديدها .

2) بين أن $H:x\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على $]0,+\infty[$

3) أحسب التكامل على $I=\int_1^{e^2}\dfrac{2-\ln x}{x}dx$ ثم أول مبيانيا هذه النتيجة

التمرين 4 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل أسفله)



1) أ- أدرس نهاية f في 0 على اليمين
ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
ج- حدد مقاربات (C_f)
2) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$
ب- حل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x>0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$
ج- ضع جدول تغيرات f
3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثيتيها
ب- إستنتج إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$
4) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز ب I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=n$.
أ- بين أن $0\le I_2\le e-\frac{1}{2}$
ب- بين أن $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$
ج- أحسب I_n بدلالة n
د- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$

<u>الجزء الأول</u>

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$
2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس تغيرات f
3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
4) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)
5) بين أن $(D):x=1$ هو محور تماثل ل (C_f)
6) مثل مبيانيا (C_f) و $(\Delta):y=x$

<u>الجزء الثاني</u>

نضع $\varphi(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
2) أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x>0$: $\varphi(x)=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

ج- بين أن $(\Delta): y=x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3<\alpha<0,4$