أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الدوال اللوغاريتمية

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$f:x\to ln(x+1)$ (1 $\quad$ $g:x\to ln(x^2-3x+2)$ (2 $\quad$ $h:x\to \dfrac{x}{\ln x}$ (3

أجوبة: (1 $f(x)=ln(x+1)$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1>0\}$

$x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ ومنه $D_f=]-1,+\infty[$

(2 $g(x)=ln(x^2-3x+2)$

يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3x+2>0\}$

x^2-3x+2 نبحث عن الجذور

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{3+1}{2\times1}=\dfrac{4}{2}=2$ و $x_1=\dfrac{3-1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

ومنه : $D_g=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

(3 $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ يعني $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x>0 et \ln x\neq0\}$

$\ln x=0$ يعني $\ln x=\ln1$ يعني $x=1$ ومنه : $D_h=]0;1[\cup]1;+\infty[$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

(1 $ln(x-2)=0$ $\quad$ (2 $ln(3x-1)=ln(5x-10)$

(3 $ln(x-1)\geq0$

أجوبة : (1 $ln(x-1)=0$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-2>0$

يعني إذا كان: $x>2$ اذن : $D_E=]2;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$ln(x-2)=0$ يعني $ln(x-2)=ln(1)$

يعني $x-2=1$ يعني $x=3\in D_E$ ومنه $S=\{3\}$

(2 $ln(3x-1)=ln(5x-10)$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $5x-10>0$ و $3x-1>0$

يعني إذا كان: $x>2$ و $x>\dfrac{1}{3}$ اذن : $D_E=]2;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$ln(3x-1)=ln(5x-10)$ يعني $3x-1=5x-10$

يعني $-2x=-9$ يعني $x=\dfrac{9}{2}\in D_E$ ومنه $S=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

(3 $ln(2x-6)\geq0$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-6>0$

يعني إذا كان: $x>3$ اذن : $D_E=]3;+\infty[$

المرحلة 2: حل المتراجحة:

$ln(2x-6)\geq0$ يعني $ln(2x-6)\geq\ln1$

يعني $2x-6\geq1$ يعني $x\geq\dfrac{7}{2}$ يعني $x\in\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right[$

ومنه $S=\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right[\cap]3;+\infty[$ يعني $S=\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right[$

تمرين3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1 $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$ $\quad$ (2 $ln(2x)=ln(x^2+1)$

أجوبة : (1 $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$.

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1>0$ و $1-x>0$

يعني إذا كان: $x>\dfrac{1}{2}$ و $x<1$ اذن : $D_E=\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0$ يعني $ln(2x-1)=ln(1-x)$

يعني $2x-1=1-x$ يعني $3x=2$ يعني $x=\dfrac{2}{3}\in D_E$ ومنه $S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

(2 $ln(2x)=ln(x^2+1)$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x>0$ و $x^2+1>0$ يعني

إذا كان: $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

ليكن x من $]0;+\infty[$: $In(2x)=In(x^2+1)\Leftrightarrow 2x=x^2+1$.

$x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0$. $\Leftrightarrow x=1\in D_E$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\{1\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$.

الجواب: ***المرحلة 1:*** هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$x-1>0$ و $3x+1>0$ أي $\left(x>-\dfrac{1}{3};x>1\right)$ يعني $x>1$

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $]1;+\infty[$

$ln(x-1)-ln(3x+1)<0\Leftrightarrow ln(x-1)<ln(3x+1)$

$x-1<3x+1\Leftrightarrow 2x>-2\Leftrightarrow x>-1$

إذن: $S=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[$ أي $S=]1;+\infty[$.

تمرين5: إذا علمت أن $l\,n(2)\simeq 0,7$ و $l\,n(3)\simeq 1,1$

فاحسب ما يلي: $l\,n(6)$, $l\,n(4)$, $l\,n(8)$, $l\,n(72)$

$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$, $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$, $l\,n\left(\sqrt{2}\right)$, $l\,n\left(\sqrt{6}\right)$, $l\,n\left(3\sqrt{2}\right)$

$ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)$, $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}$

$C=ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015}+ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2015}$

أجوبة :

$$l\,n(6)=l\,n(2\times 3)=l\,n(2)+l\,n(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$$

$$l\,n(4)=l\,n(2\times 2)=l\,n\left(2^2\right)=2l\,n(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$$

$$l\,n(8)=l\,n(2\times 2\times 2)=l\,n\left(2^3\right)=3l\,n(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$$

$$l\,n(72)=l\,n\left(3^2\times 2^3\right)=l\,n\left(3^2\right)+l\,n\left(2^3\right)=2l\,n(3)+3l\,n(2)$$

$$l\,n(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$$

و $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)=l\,n(3)-l\,n(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$

$$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)=-l\,n(2)\simeq -0,7$$

$$l\,n\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}l\,n(6)\simeq \frac{1}{2}\times 1,8\simeq 0,9$$

$$\ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$$

$$ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)=ln\left(3\times 2^2\right)+ln\left(\sqrt[3]{3}\right)=ln(3)+2ln(2)+ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)=ln(3)+2ln(2)+\frac{1}{3}ln(3)$$

$$ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)\simeq 1,1+1,4+\frac{1}{3}\times 1,1\simeq 2,86$$

$$A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=ln\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)=ln\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$A=ln\left(\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)=ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}ln2\simeq 0,35$$

$$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}=\frac{1}{4}ln3^4+\frac{1}{2}ln3-ln\frac{1}{3^3}=\frac{4}{4}ln3+\frac{1}{2}ln3+3ln3$$

$$B\simeq 1,1+\frac{1,1}{2}+3\times 1,1\simeq 4,95$$

$$C=ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015}+ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2015}=ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015}\times\left(\sqrt{2}-1\right)^{2015}\right)$$

$$C=ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^{2015}=ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right)^{2015}=2015ln(1)=2015\times 0=0$$

تمرين6: بسط

1) $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$ 2) $B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln\left(10^6\right)$

الجواب: 1) $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)=\ln(3)-\ln(5)+\ln(3\times 5)$

$$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln3+\ln5=2\ln(3)=\ln\left(3^2\right)=\ln(9)$$

$$B=\ln\left(10^{-2}\right)-\ln\left(10^3\right)+\ln\left(10^6\right)=-2\ln(10)-3\ln(10)+6\ln(10)$$

$$B=\ln(10)=\ln(2\times 5)=\ln2+\ln5$$

تمرين7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التالية:

1) $lnx+ln(x-1)-ln2=ln3$ 2) $ln(2x+5)+ln(x+1)\le ln4$.

الأجوبة : 1) $lnx+ln(x-1)-ln2=ln3$ يعني

$lnx+ln(x-1)=ln2+ln3$ يعني $lnx+ln(x-1)=ln2+ln3$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$ و $x-1>0$

يعني إذا كان: $x>0$ و $x>1$ اذن : $D_E=]1;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$lnx+ln(x-1)=ln2+ln3$ يعني $ln\left(x(x-1)\right)=ln6$

$x(x-1)=6$ يعني $x^2-x-6=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=1+24=25>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}$ و $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}$

$x_1=3$ و $x_2=-2$ وبما أن : $x_2=-2\notin]1;+\infty[$ فان : $S=\{3\}$

2) $ln(2x-5)+ln(x+1)\le ln4$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$x+1>0$ و $2x-5>0$ أي $\left(x>-1 \text{ و } x>\frac{5}{2}\right)$ يعني $x>\frac{5}{2}$

ومنه : $D_I=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$ln(2x-5)+ln(x+1)\le ln4\Leftrightarrow ln\left((2x-5)(x+1)\right)\le ln4$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)(x+1)\le 4\Leftrightarrow 2x^2-3x-9\le 0$$

$$\Delta=b^2-4ac=9-4\times 2\times(-9)=9+72=81>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3+9}{2\times 2}$ و $x_2=\frac{3-9}{2\times 2}$ يعني $x_1=3$ و $x_2=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$ $\quad -3/2 \quad$ 3 $\quad +\infty$
$2x2-3x-9$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

إذن: $S=\left[-\frac{3}{2};3\right]\cap\left]\frac{5}{2};+\infty\right[=\left]\frac{5}{2};3\right]$

تمرين8: بين أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx=-\infty$

الجواب: نضع : $X=\frac{1}{x}$

$$X\to+\infty\Leftrightarrow x\to 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} lnx=\lim_{X\to+\infty} ln\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{X\to+\infty}-\ln X=-\lim_{X\to+\infty}\ln X=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$

تمرين9: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x)+1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-lnx$ 6) $\lim\limits_{x\to 0^+} ln^2(x)+lnx$

الأجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+1}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{\ln x} = 2+0=2$

3) $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ لأن : $\lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty} ln^2(x) - lnx = \lim_{x\to+\infty} ln^2(x)-lnx = \lim_{x\to+\infty} lnx(ln(x)-1) = +\infty$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty} x - lnx = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

6) $\lim_{x\to0^+} ln^2(x)+lnx = \lim_{x\to0^+} lnx(ln(x)+1)=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln(x)+1=-\infty$

تمرين10: أحسب: 1) $\ln(e^3)$ و $\ln(e^7)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : المعادلة $\ln(x)=7$

الأجوبة : 1) $\ln(e^3)=3$ و $7=\ln(e^7)$

2) $x>0$

$\ln(x)=7$ يعني $\ln(x)=7\ln(e)$ يعني $x=e^7$

$S=\{e^7\}$

تمرين11: أحسب وبسط :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac1e\right)$ $B=2\ln(\sqrt e)+\ln(e\sqrt e)-\frac13\ln(e^9)$

الجواب: 1) $A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac1e\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$A=2\times1+4\times1--1=7$

$B=2\ln(\sqrt e)+\ln(e\sqrt e)-\frac13\ln(e^9)=2\times\frac12\ln(e)+\ln e+\ln(\sqrt e)-\frac13 9\ln(e)$

$B=1\ln(e)+\ln e+\frac12\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac12-3=\frac12-1=-\frac12$

تمرين12: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $ln(2x-1)=\frac32$ 2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

الجواب: 1) $ln(2x-1)=\frac32$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1>0$

يعني $x>\frac12$ اذن : $D_E=\left]\frac12;+\infty\right[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$\ln(2x-1)=\frac32$ يعني $ln(2x-1)=\frac32 ln(e)$ يعني $ln(2x-1)=ln\left(e^{\frac32}\right)$

يعني $2x-1=e^{\frac32}$ يعني $2x-1=(\sqrt e)^3$ يعني

$x=\frac{(\sqrt e)^3+1}{2}\in\left]\frac12;+\infty\right[$

$S=\left\{\frac{(\sqrt e)^3+1}{2}\right\}$

2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$

نضع : $\ln x = X$ والمعادلة تصبح : $2X^2+X-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+48=49>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{-1+7}{2\times4}$ و $X_2=\frac{-1-\sqrt{49}}{2\times2}$ يعني $X_1=\frac32$ و $X_2=-2$

يعني $\ln x_1=\frac32$ و $\ln x_2=-2$ يعني $x_1=e^{\frac32}$ و $x_2=e^{-2}$

يعني $x_1=(\sqrt e)^3=e\sqrt e$ و $x_2=\frac1{e^2}$ ومنه : $S=\left\{e\sqrt e,\frac1{e^2}\right\}$

تمرين13: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

الجواب: $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\to1\\2\ln x-\ln y=3\to2\end{cases}$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$5\ln x=5$ يعني $\ln x=1$ يعني $\ln x=\ln e$ يعني $x=e$

نعوض $x=e$ في المعادلة الأولى فنجد : $3\ln e+\ln y=2$

يعني $\ln y=2-3$ يعني $\ln y=-1$ يعني $y=e^{-1}$ يعني $y=\frac1e$

ومنه : $S=\left\{\left(e;\frac1e\right)\right\}$

تمرين14: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac1x+lnx\right)$ 2) $\lim_{x\to0^+}x^4\log x$ 3) $\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$

4) $\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac1x\right)$ 5) $\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ ضع : $X=\sqrt x$

الأجوبة : 1) $\lim_{x\to0^+}\frac1x+lnx=\lim_{x\to0^+}\frac{1+xlnx}{x}=\frac1{0^+}=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to0^+}xlnx=0$

2) $\lim_{x\to0^+}x^4\log x=0$ حسب الخاصية : $\lim_{x\to0^+}x^n lnx=0$

3) $\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x=0$ 4) $\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac1x\right)$

نضع : $X=\frac1x$ $X\to0^+\Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac1x\right)=\lim_{0^+}\frac1X ln(1+X)==\lim_{0^+}\frac{ln(1+X)}{X}=1$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty$

5) $\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ نضع : $X=\sqrt x$

$X^2=x\Leftrightarrow X^2=(\sqrt x)^2\Leftrightarrow X=\sqrt x$

$X\to0^+\Leftrightarrow x\to0^+$

$\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2=\lim_{0^+}X^2(ln(X^2))^2=\lim_{0^+}X^2(2lnX)^2=\lim_{0^+}4X^2(lnX)^2$

$\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2=4\lim_{0^+}(XlnX)^2=4\times0^2=0$ لأن: $\lim_{x\to0^+}xlnx=0^-$

تمرين15: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=x^2-\ln x$ و $f(x)=x\ln x$ و $f(x)=\ln(1+x^2)$

الأجوبة : $f'(x)=(x^2-\ln x)'=2x-\frac1x=\frac{2x^2-1}{x}$

$f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x\ln' x=1\ln x+x\times\frac1x=\ln x+1$

$f'(x)=(\ln(1+x^2))'=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$

تمرين16: حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1. $I=\mathbb{R};\ f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$
2. $I=]0;1[;\ f(x)=\frac{1}{xlnx}$

الأجوبة :1) لدينا $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$

اذن : $F(x)=\frac{1}{4}\ln|x^4+2|+k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$

يعني : $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+k$ لأن : $x^4+2>0$

2) $f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}=\frac{(lnx)'}{lnx}$

اذن : $F(x)=\ln|\ln x|+k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$

تمرين17: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f و حدد عددين حقيقيين a و b بحيث: $(\forall x\in D); f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$
2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-2[$
3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\infty;-2[$ بحيث $F(-3)=\ln 2$

أجوبة : يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x-2\neq 0\}$

x^2+x-2 نبحث عن الجذور

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ يعني $x_1=\frac{-1+3}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ و $x_2=\frac{-1-3}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$

$D_f=\mathbb{R}/\{-2;1\}$

$f(x)=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$ نجد أن :

$\begin{cases}a+b=5\\2a-b=1\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد : $3a=6$ يعني $a=2$

وبتعويض a بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أن: $2+b=5$ يعني $b=3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f هي :

$(\forall x\in D_f); f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

2) $(\forall x\in D_f); f(x)=2\frac{(x-1)'}{x-1}+3\frac{(x+2)'}{x+2}$

ومنه : $F(x)=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

وبما أن : $x\in]-\infty;-2[$ يعني $x<-2$ اذن: $x<1$

ومنه : $x+2<0$ و $x-1<0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:

$F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

3) $F(-3)=\ln 2$ يعني $2\ln(4)+3\ln(1)+k=\ln 2$ يعني $k=\ln 2-2\ln(2^2)$

يعني $k=-3\ln 2$ ومنه : $F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)-3\ln 2$

تمرين18: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{2x-5}{x-1}$

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b بحيث: $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)=a+\frac{b}{x-1}$
2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(2)=0$

أجوبة :1) $a+\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)+b}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\frac{2x-5}{x-1}$

نجد أن : $\begin{cases}a=2\\-a+b=-5\end{cases}$ نجد اذن : $a=2$ يعني $b=-3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f

هي : $(\forall x\in]1;+\infty[); f(x)=2-\frac{3}{x-1}$

2) $(\forall x\in]2+\infty[); f(x)=2-3\frac{(x-1)'}{x-1}$

ومنه : $F(x)=2x-3\ln|x-1|+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

وبما أن : $x\in]1+\infty[$ يعني $x>1$

ومنه : $x-1>0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:

$F(x)=2x-3\ln(x-1)+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

3) $F(2)=0$ يعني $4-3\ln(1)+k=0$ يعني $k=-4$

ومنه : $F(x)=2x-3\ln(x-1)-4$

تمرين19:

I. لتكن الدالة العددية g بحيث: $g(x)=x-lnx$

1. حدد D_g و أحسب نهايات g عند محدات D_g
2. أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات g
3. استنتج أن: $\forall x>0\ ,\ x>lnx$

II. لتكن الدالة العددية f بحيث : $\begin{cases}f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx},\ x\succ 0\\ f(0)=-1\end{cases}$

1. بين أن $D_f=[0;+\infty[$
2. بين أن f متصلة في الصفر على اليمين
3. أحسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
4. بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين
5. بين أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ,\ f'(x)=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$
6. أعط جدول تغيرات f
7. حدد نقط تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=1$
8. بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $]\frac{1}{2};1[$
9. أنشئ C_f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (خذ $e\approx 2,7$, $ln2\approx 0,7$)

I. **أجوبة :1)** $g(x)=x-lnx$ $D_g=]0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x-lnx=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+} x-lnx=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty$

2) $g'(x)=(x-lnx)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

اشارة $g'(x)$ هي اشارة : $x-1$ لأن : $x\in]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

3)نلاحظ أن g تقبل قيمة دنيا عند : $x_0=1$

اذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ g(1)\le g(x)$ اذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ 1\le x-lnx$

اذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ 0<1\le x-lnx$ اذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ lnx<x$

II.1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx}\\ f(0)=-1\end{cases}$ f دالة معرفة يعني $x-lnx\neq0$ و $x>0$

وحسب ماسبق وجدنا أن $0<x-lnx$ اذن : $x-lnx\neq0$

ولدينا 0 لديه صورة اذن : $D_f=[0;+\infty[$

2) $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+lnx}{x-lnx}=\lim_{x\to0^+}\frac{lnx\left(\frac{x}{lnx}+1\right)}{lnx\left(\frac{x}{lnx}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{lnx}+1}{\frac{x}{lnx}-1}$

لأن $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{lnx}=0^-$ و $\lim_{x\to0^+}lnx=-\infty$ و $\frac{0}{\infty}=0$ اذن : $\lim_{x\to0^+}f(x)=-1=f(0)$

ومنه f متصلة في الصفر على اليمين

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+lnx}{x-lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{lnx}{x}\right)}{x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{lnx}{x}}{1-\frac{lnx}{x}}=1$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ ومبيانيا : $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة f

4) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+lnx}{x-lnx}+1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+lnx+x-lnx}{x-lnx}}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x(x-lnx)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x-lnx}=0=f'_d(0)$

ومنه f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

5) $f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+lnx}{x-lnx}\right)'=\frac{(x+lnx)'(x-lnx)-(x+lnx)(x-lnx)'}{(x-lnx)^2}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-lnx)-(x+lnx)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-lnx)^2}=\frac{x-lnx+1-\frac{lnx}{x}-x-lnx+1+\frac{lnx}{x}}{(x-lnx)^2}$$

$\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=\frac{2-2lnx}{(x-lnx)^2}=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6)اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $1-lnx$

$e>x\Leftrightarrow \ln e>lnx\Leftrightarrow 1>lnx\Leftrightarrow 1-lnx>0$

ومنه جدول الاشارة والتغيرات :

7) $f(x)=1$ يعني $\frac{x+lnx}{x-lnx}=1$ يعني $x+lnx=x-lnx$

يعني $2lnx=0$ يعني $lnx=0$ يعني $x=1$

اذن نقطة تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=1$ هي $A(1;1)$

8) f دالة متصلة على المجال $D_f=[0;+\infty[$ ومنه متصلة على $\left[\frac12;1\right]$

و $f\left(\frac12\right)=\frac{\frac12+ln\left(\frac12\right)}{\frac12-ln\left(\frac12\right)}=\frac{\frac12-ln2}{\frac12+ln2}=\frac{\frac{1-2ln2}{2}}{\frac{1+2ln2}{2}}=\frac{1-2ln2}{1+2ln2}<0$

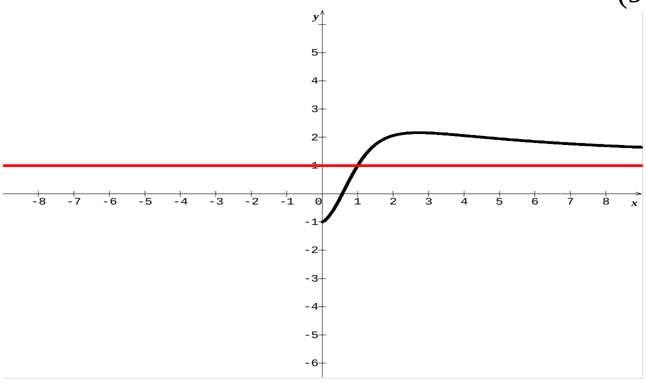
$f(1)=\frac{\frac12+ln(1)}{\frac12-ln(1)}=\frac{\frac12}{\frac12}=1>0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$

حلا على الأقل على المجال $\left]\frac12;1\right[$

أي : C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $\left]\frac12;1\right[$

9)



تمرين20: أحسب وبسط ما يلي : 1) $\log_2 4$ 2) $\log_8 4$

3) $\log_{\sqrt2}\frac12$ 4) $\log_{\sqrt3}9$

5) $A=\log_2\left(\frac15\right)+\log_2(10)+\log_{\frac13}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

أجوبة :1) $\log_2 4$ طريقة 1: $\log_2 4=\frac{\ln4}{\ln2}=\frac{\ln2^2}{\ln2}=\frac{2\ln2}{\ln2}=2$

طريقة 2: $\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2\times1=2$

2) $\log_8 4$: $\log_8 4=\frac{\ln4}{\ln8}=\frac{\ln2^2}{\ln2^3}=\frac{2\ln2}{3\ln2}=\frac23$

3) $\log_{\sqrt2}\frac12=-\log_{\sqrt2}2=-\log_{\sqrt2}\left(\sqrt2\right)^2=-2\log_{\sqrt2}\sqrt2=-2\times1=-2$

يمكن استعمال طريقة أخرى

4) $\log_{\sqrt3}9=\log_{\sqrt3}\left(\sqrt3\right)^4=4\log_{\sqrt3}\sqrt3=4\times1=4$

5) $A=\log_2\left(\frac15\right)+\log_2(10)+\log_{\frac13}\left(\sqrt[5]{3}\right)=-\log_2 5+\log_2(5\times2)+\log_{\frac13}\left(3^{\frac15}\right)$

$A=-\log_2 5+\log_2 5+\log_2 2+\frac15\log_{\frac13}3=1+\frac15\log_{\frac13}3=1-\frac15\log_{\frac13}\frac13=1-\frac15=\frac45$

تمرين21: أحسب ما يلي:

1) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)$ 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{2}\right)$

أجوبة : 1) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)=\log_2\left(\frac{1}{5}\times 10\right)=\log_2(2)=1$

2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}(2)=-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}\times 1=-\frac{1}{3}$

تمرين22: أحسب و بسط ما يلي:

$\log_{10}100$, $\log_{10}0,0001$

$A=\log(250000)+\log\sqrt{250}-\log(125)$

أجوبة : $\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2\times 1=2$

$\log_{10}0,0001=\log_{10}10^{-4}=-4\log_{10}10=-4$

$$A=\log(250000)+\log\sqrt{250}-\log(125)$$

$$A=\log\left(5^2\times 10^4\right)+\frac{1}{2}\log\left(5^2\times 10\right)-\log\left(5^3\right)$$

$$A=\log 5^2+\log 10^4+\frac{1}{2}\left(\log 5^2+\log 10\right)-3\log 5$$

$$A=2\log 5+4\log 10+\frac{1}{2}\left(2\log 5+1\right)-3\log 5$$

$$A=2\log 5+4+\log 5+\frac{1}{2}-3\log 5=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

تمرين23: حل في $\mathbb{R}$ **المعادلات** التالية :

1. $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$

2. $2(\log x)^2-19\log x-10=0$ حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري

أجوبة : 1) المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$x>0$ و $2x>0$

يعني إذا كان: $x>0$ و $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة: $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$

يعني $\log_5(x)-1=0$ أو $\log_3(2x)=0$ يعني $\log_5(x)=\log_5(5)$ أو

$\log_3(2x)=\log_3(1)$

يعني $x=5$ أو $2x=1$ يعني $x=5$ أو $x=\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2};5\right\}$

2) $2(\log x)^2-19\log x-10=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

نضع : $\log x=X$ والمعادلة تصبح : $2X^2-19X-10=0$

$\Delta=b^2-4ac=(19)^2-4\times 2\times(-10)=361+80=441=(21)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{19+21}{2\times 2}=10$ و $X_2=\frac{19-21}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

يعني $\log x_1=10$ و $\log x_2=-\frac{1}{2}$

يعني $x_1=10^{10}$ و $x_2=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ومنه : $S=\left\{\frac{\sqrt{10}}{10},10^{10}\right\}$

تمرين24: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 1$

الجواب : المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$x-\frac{1}{2}>0$ يعني $x>\frac{1}{2}$ اذن : $D_I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 1$ يعني $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ يعني $x-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$

يعني $x\leq 1$ ومنه : إذن: $S=]-\infty;1]\cap\left]\frac{1}{2};+\infty\right[=\left]\frac{1}{2};1\right]$

تمرين25: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$\ln^2(x-1)-\ln(x-1)-2=0$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$$

أجوبة : 1) $\ln^2(x-1)-\ln(x-1)-2=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-1>0$ يعني $x>1$

نضع : $\ln(x-1)=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-X-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{1+3}{2\times 1}$ و $X_2=\frac{1-3}{2\times 1}$ يعني $X_1=2$ و $X_2=-1$

يعني $\ln(x_1-1)=2$ و $\ln(x_2-1)=-1$ يعني $x_1-1=e^2$ و $x_2-1=e^{-1}$

يعني $x_{1e}=e^2+1$ و $x_2=\frac{1}{e}+1$ ومنه : $S=\left\{e^2+1,\frac{1}{e}+1\right\}$

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$ -

المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$x+1>0$ و $-x+2>0$ يعني $x>-1$ و $x<2$

اذن : $D_I=]-1;2[$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$ يعني

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\leq\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$ يعني $x+1\geq -x+2$

يعني $x\geq 1/2$ ومنه : إذن: $S=]-1;2[\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=\left[\frac{1}{2};2\right[$

تمرين26: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\leq 0$

الجواب : تحديد D مجموعة تعريف المتراجحة :

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-3x+12}{2x+2}>0\right\}$$

$D=]-1;4[$ نعتبر : $x\in D$

$$\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\leq 0\Leftrightarrow\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\leq\ln 1\Leftrightarrow\frac{-3x+12}{2x+2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-3x+12}{2x+2}-1\leq 0\Leftrightarrow\frac{-5x+10}{2x+2}\leq 0$$

إذن : $x\in]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[$

و منه : $S=]-1;4[\cap\left(]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[\right)$ **إذن :** $\boxed{S=[2;4[}$

تمرين27: **احسب النهايات التالية :**

1) $\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^3$ **2)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}$ **3)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$

أجوبة : 1- حساب : $\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^3$

مباشرة : $0\times(-\infty)$ **شكل غير محدد**

$$\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^3=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}^3\left(\ln\sqrt[3]{x}^3\right)^3$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = 3^3\left(\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$$

حساب : $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}$ نضع : $t=\sqrt[3]{x}$

إذا كان : $x\to0^+$ فإن : $t\to0^+$

و منه : $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}=\lim_{t\to0^+}t\ln t$

و بما أن : $\lim_{t\to0^+}t\ln t=0$ فإن : $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}=0$

إذن : $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = 3^3\left(\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3 = 3^3\times0^3$ $\boxed{\lim_{x\to0^+}x(\ln x)^3=0}$

-2 حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}$: مباشرة $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\sqrt[10]{x}^{10})^{10}}{\sqrt[10]{x}^{10}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=10^{10}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}$$

حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}$ نضع : $t=\sqrt[10]{x}$

إذا كان : $x\to+\infty$ فإن : $t\to+\infty$ و منه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$

و بما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=10^{10}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}=10^{10}\times0^{10}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=0}$

-3 حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$: مباشرة $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$

حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$ نضع : $t=3x+1$

إذا كان : $x\to+\infty$ فإن : $t\to+\infty$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$

و بما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}=0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}=\frac{3}{2}\times0=0$

تمرين28: تحدد $f'(x)$ بحيث : $f(x)=\frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}$

الجواب: $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

$$f'(x)=\left(\frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{(3x^2+1)\ln'(3x^2+1)-(3x^2+1)'\ln(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{6x}{3x^2+1}(3x^2+1)-6x\ln(3x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{6x-6x\ln(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

إذن : $\boxed{f'(x)=\frac{6x\left(1-\ln(3x^2+1)\right)}{(3x^2+1)^2}}$

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1:

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=x(\ln x+1)^2$ إذا كانت $x\neq0$ و $f(0)=0$

1. حدد D_f
2. أحسب: و أحسب و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
3. أحسب $\lim_{x\to-1^+}x(\ln x)^2$ ثم استنتج اتصال الدالة f على اليمين في 0
4. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
5. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة مبيانيا
6. تحقق أن $\forall x>0\ f'(x)=(\ln x+1)(\ln x+3)$
7. حدد جدول تغيرات الدالة f
8. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة الذي أفصولها 1

تمرين2:

1. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3-x)}{x}$
2. أحسب مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=x(\ln x)^4$

تمرين3: أحسب

1) $\log\frac{1}{10^4}+\log10^4$ 2) $\log5+\log2$ 3) $\log\frac{1}{2}-\log50$

4) $\log\frac{2}{3}-\log\sqrt{90}+\log\sqrt{40}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $\log(x+3)+\log x=1$

1) $\log_4(x-1)+\log_4 2=1$ 2) $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=2$

3) $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$ 4) $(\log x)^2+\log x-6=0$

حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري

تمرين5: حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة بما يلي:

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ على المجال $]-\infty;1[$