تصحيح التمرين الأول

الجزء الأول :

1) لندرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2x^3 - 1 + 2\ln x\right)' \\ &= 6x^2 + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$

و من الواضح أن $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g'(x) > 0$

و منه الدالة g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2)

- ✓ لدينا g متصلة على $]0,+\infty[$
- ✓ و g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- ✓ و لدينا $0 \in g(]0,+\infty[)$ (**لأن** $g(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty,+\infty[$)

و منه يوجد α و حيد من $]0,+\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

3) لندرس إشارة $g(x)$:

- ✓ على المجال $]0,\alpha]$: لدينا $0 < x \leq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(\alpha)$

و منه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

- ✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$: لدينا $x \geq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(\alpha)$

و منه $g(x) \geq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

الجزء الثاني :

(1

✓

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to0^+} 2x - \frac{1}{x^2}\ln x = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to0^+} 2x = 0$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

✓

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$= +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \end{cases}$

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا مقاربا مائلا معادلته $y = 2x$ بجوار $+\infty$

(2 ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

و لدينا : $x^2 > 0$ إذن إشارة $f(x) - 2x$ هي إشارة $-\ln x$

✓ على المجال $]0,1]$:

لدينا $\ln x \le 0$

إذن $-\ln x \geq 0$

و منه $f(x)-2x \geq 0$

و بالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ)

✓ على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا $\ln x \geq 0$

إذن $-\ln x \leq 0$

و منه $f(x)-2x \leq 0$

و بالتالي (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ)

3) ليكن $x \in]0,+\infty[$:

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x - \frac{\ln x}{x^2}\right)' \\
&= 2 - \frac{\ln'(x)\times x^2 - \ln(x)\times(x^2)'}{(x^2)^2} \\
&= 2 - \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{x^4} \\
&= 2 - \frac{x - \ln(x)\times 2x}{x^4} \\
&= 2 - \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} \\
&= 2 - \frac{1-2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

إذن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

✓ لدينا : $x^3 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

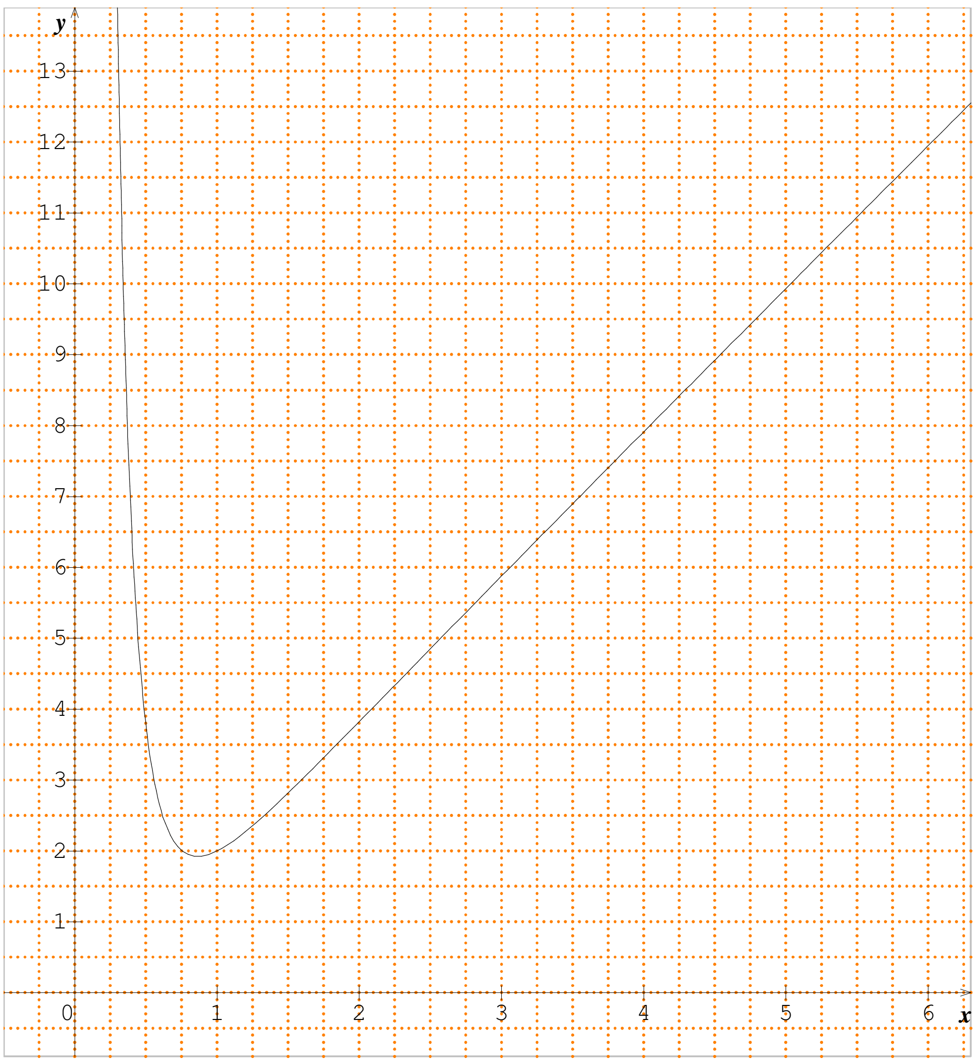
✓ على المجال $]0,\alpha]$: $g(x) \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$ و منه f تناقصية

و على المجال $[\alpha,+\infty[$: $g(x) \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$ و منه f تزايدية

جدول تغيرات الدالة f **:**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(4



الجزء الثالث :

(1

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^n \left| -\frac{\ln x}{x^2} \right| dx \times 2cm^2 \\ &= 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx .cm^2 \end{aligned}$$

(2 لدينا : $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^n \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \left[\frac{1}{x} \right]_1^n \\ &= \left(\left(\frac{-\ln n}{n} \right) - 0 \right) - \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx .cm^2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} \right) .cm^2 \end{aligned}$$

✓

✓

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 2.cm^2$$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول

1) أ- لندرس تغيرات f على المجال $]-1,+\infty[$:

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

ليكن $x \in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\ln(x+1)\right)' \\ &= 0+\frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

إذن : $\left(\forall x \in]-1,+\infty[\right) \quad f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

لدينا : $x > -1$ إذن $x+1>0$ و منه $\left(\forall x \in]-1,+\infty[\right) \quad f'(x)>0$

و بالتالي : f تزايدية قطعا على المجال $]-1,+\infty[$.

ب- لدينا :

✓ $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} 1+\ln(t) = -\infty$$

لأن : $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \ln(x+1) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \ln(t) = -\infty$ $\quad \begin{pmatrix} t=1+x \\ x \to -1^+ \\ t \to 0^+ \end{pmatrix}$

✓ $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1+\ln(x+1) = \lim_{t \to +\infty} 1+\ln(t) = +\infty$$

لأن : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$ $\quad \begin{pmatrix} t=1+x \\ x \to +\infty \\ t \to +\infty \end{pmatrix}$

2) أ- لدينا : $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x)-x = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1)-x = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \displaystyle \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1) = -\infty \\ \displaystyle \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} -x = 1 \end{cases}$

ب-

✓ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \quad \begin{pmatrix} t=x+1 \\ x\to+\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix}$$

✓

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} 1+\ln(x+1)-x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1+(x+1).\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1 \end{cases}$

ج- الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

ليكن $x\in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x)-x)' \\ &= f'(x)-1 \\ &= \frac{1}{1+x}-1 \\ &= \frac{1-1-x}{1+x} \\ &= \frac{-x}{x+1}\end{aligned}$$

لدينا : $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

و لدينا : $x+1>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$

x	$-1 \quad 0 \quad +\infty$
$-x$	$+ \quad 0 \quad -$

جدول تغيرات g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

د-

✓ **على المجال** $]-1,0]$ **:**

- لدينا g متصلة
- و لدينا g تزايدية قطعا
- و لدينا : $0\in g\left(]-1,0]\right)=]-\infty,1]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1,0]$ و منه $\alpha\le 0$

✓ **على المجال** $[0,+\infty[$

- لدينا g متصلة
- و لدينا g تناقصية قطعا
- و لدينا : $0\in g\left([0,+\infty[\right)=]-\infty,1]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $[0,+\infty[$

- لدينا g متصلة على $[2,3]$
- و $g(2)\times g(3)\le 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $2\le\beta\le 3$

✓ خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha\le 0$ و $2\le\beta\le 3$

ه-

✓ **على المجال** $]-1,\alpha]$ **:**

لدينا $-1<x\le\alpha$ و g تزايدية

إذن : إذن : $g(x)\le g(\alpha)$

و منه $g(x)\le 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

✓ **على المجال** $[\alpha,\beta]$ **:**

لدينا : $g\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)=\left[0,1\right]$

إذن : $\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]\quad 0\le g\left(x\right)\le 1$

و منه : $\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]\quad 0\le g\left(x\right)$

- ✓ **على المجال** $\left[\beta,+\infty\right[$

لدينا $x\ge\beta$ و g تناقصية

إذن : إذن : $g\left(x\right)\le g\left(\beta\right)$

و منه $g\left(x\right)\le 0$ (لأن $g\left(\beta\right)=0$)

الوضع النسبي ل $\left(C_f\right)$ **و** $\left(D\right)$

- ✓ **على كل من المجالين** $\left]-1,\alpha\right]$ **و** $\left[\beta,+\infty\right[$ **:**

لدينا $g\left(x\right)\le 0$

إذن : $f\left(x\right)-x\le 0$

و منه $\left(C_f\right)$ تحت المستقيم $\left(D\right)$

- ✓ **على المجال** $\left[\alpha,\beta\right]$ **:**

لدينا $g\left(x\right)\ge 0$

إذن : $f\left(x\right)-x\ge 0$

و منه $\left(C_f\right)$ فوق المستقيم $\left(D\right)$

الجزء الثاني :

(1

- ✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=2$

إذن : $2\le u_0\le\beta$

- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:
  - نفترض أن : $2\le u_n\le\beta$
  - و نبين أن : $2\le u_{n+1}\le\beta$ ؟

حسب الإفتراض $2\le u_n\le\beta$ و نعلم أن f تزايدية

إذن : $f\left(2\right)\le f\left(u_n\right)\le f\left(\beta\right)$

إذن : $1+\ln 3\le u_{n+1}\le\beta$

و منه $2 \le u_{n+1} \le \beta$

(لأن $2 \le 1+\ln 3$ و $g(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\beta)-\beta=0 \Leftrightarrow f(\beta)=\beta$)

- نستنتج أن : $2 \le u_n \le \beta$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) على المجال $[\alpha,\beta]$ لدينا : $f(x)-x \ge 0$

إذن على المجال $[2,\beta]$: $f(x)-x \ge 0$ (لأن $[2,\beta]\subset[\alpha,\beta]$)

و نعلم أن $2 \le u_n \le \beta$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $f(u_n)-u_n \ge 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1}-u_n \ge 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية

- بما أن $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة (بالعدد β) فإن $(u_n)_n$ متقاربة

ملاحظة : لدينا :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \in [2,\beta] \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- f متصلة على $[2,\beta]$
- $f([2,\beta])\subset[2,\beta]$
- $(u_n)_n$ متقاربة

إذن نهاية $(u_n)_n$ هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow f(x)-x=0 \\ &\Leftrightarrow g(x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\alpha \text{ أو } x=\beta \end{aligned}$$

و بما أن $\alpha \notin [2,\beta]$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :

1) لدينا الدالة U قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$U'(x) = \left(\ln(x)+x-3\right)' = \frac{1}{x}+1 = \frac{1+x}{x}$$

لدينا : $x>0$ إذن $x>0$ و $1+x>0$

إذن $\frac{1+x}{x}>0$

و منه $U'(x)>0 \quad \left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$

و بالتالي الدالة U تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2)

- ✓ U متصلة على $]0,+\infty[$
- ✓ U تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- ✓ $0 \in U\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(x), \lim_{x\to+\infty} U(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

إذن المعادلة $U(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α في المجال $]0,+\infty[$

- ✓ U متصلة على $[2,3]$
- ✓ $\begin{cases} U(2)=\ln(2)-1<0 \\ U(3)=\ln 3>0 \end{cases} \Rightarrow U(2)\times U(3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $2<\alpha<3$

3) لندرس إشارة $U(x)$:

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

- ✓ على المجال $]0,\alpha]$

لدينا $0<x\le\alpha$ و U تزايدية

إذن $U(x) \le U(\alpha)$

و منه $U(x) \le 0$ (لأن $U(\alpha)=0$)

✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$

لدينا $x \ge \alpha$ و U تزايدية

إذن $U(x) \ge U(\alpha)$

و منه $U(x) \ge 0$ (لأن $U(\alpha)=0$)

الجزء الثاني :

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-2\right)+2=+\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln(x)-2\right)=-\infty \end{cases}$$

2) أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-2\right)+2\right)' \\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)'.\left(\ln(x)-2\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right).\left(\ln(x)-2\right)'+0 \\ &= \frac{1}{x^2}.\left(\ln(x)-2\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x)-2}{x}+\frac{x-1}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)+x-3}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{U(x)}{x^2}$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow U(x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\alpha \end{aligned}$$

لدينا : $x^2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $U(x)$

- ✓ على المجال $]0,\alpha]$: لدينا $U(x)\leq 0$

إذن $f'(x)\leq 0$

و منه f تناقصية

- ✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$: لدينا $U(x)\geq 0$

إذن $f'(x)\geq 0$

و منه f تزايدية

الجزء الثالث :

1) ليكن $x\in]0,+\infty[$:

- ✓ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x) \\ &= \ln(x)-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}+2-\ln(x) \\ &= \frac{2-\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

إذن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$

- ✓ لنحدد تقاطع (C_f) و (C_g) :

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x}=0 \\ &\Leftrightarrow 2-\ln x=0 \\ &\Leftrightarrow \ln x=2 \\ &\Leftrightarrow x=e^2 \end{aligned}$$

إذن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(e^2,2)$

(2

- ✓ الدالة H قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$
- ✓ ليكن $x\in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right)' \\ &= \frac{1}{2}\times 2\times \ln'(x)\times \ln(x) \\ &= \frac{1}{x}\times \ln x \\ &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $H'(x)=h(x)$

و منه : $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0,+\infty[$

(3

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2-\ln x}{x}dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x}dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx \\ &= \left[2\ln x\right]_1^{e^2} - \left[H(x)\right]_1^{e^2} \\ &= (4-0)-(2-0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

<u>التأويل الهندسي :</u>

التكامل I يمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

(بوحدة قياس المساحة)

تصحيح التمرين الرابع

1) أ-

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2}.(1+\ln x)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty\\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln x) = -\infty\end{cases}$$

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases}\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0\\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0\end{cases}$$

ج- لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$

و لدينا $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{(1+\ln x)'.x^2 - (1+\ln x).(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}.x^2 - (1+\ln x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - (1+\ln x)\times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1-2-2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب-

✓ لنحل في $]0,+\infty[$ المتراجحة : $-1-2\ln x > 0$

$$-1-2\ln x > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}}$$

إذن : $S = \left]0, e^{\frac{-1}{2}}\right[$

✓

- على المجال $\left]0, e^{\frac{-1}{2}}\right[$: لدينا $x^3 > 0$ و $-1-2\ln x > 0$

إذن : $f'(x) > 0$

- على المجال $\left[e^{\frac{-1}{2}}, +\infty\right[$: لدينا $x^3 > 0$ و $-1-2\ln x \leq 0$

إذن : $f'(x) \leq 0$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$e^{(-1/2)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0

3) أ- لنبين أن $\left(C_f\right)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة :

لنحل في المجال $\left]0,+\infty\right[$ المعادلة $f\left(x\right)=0$

$$f\left(x\right)=0 \quad \Leftrightarrow 1+\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=e^{-1}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة هي $A\left(e^{-1},0\right)$

ب- على المجال $\left]0,e^{-1}\right]$: $f\left(x\right)\leq 0$

و عللى المجال $\left[e^{-1},+\infty\right[$: $f\left(x\right)\geq 0$

4) أ- على المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$: لدينا $0\leq f\left(x\right)\leq \frac{1}{2}e$

إذن : $0\leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f\left(x\right)dx \leq \frac{1}{2}e\int_{\frac{1}{e}}^{2} dx$

إذن : $0\leq I_2\leq \frac{1}{2}e\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{2}$

إذن : $0\leq I_2\leq \frac{1}{2}e\left(2-\frac{1}{e}\right)$

ومنه : $0\leq I_2\leq e-\frac{1}{2}$

ب- لنبين أن $F:x\longmapsto \dfrac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $\left]0,+\infty\right[$

✓ لدينا الدالة $F:x\longmapsto \dfrac{-2-\ln x}{x}$ قابلة للإشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$

ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$:

لدينا :

$$F'(x) = \left(\frac{-2-\ln x}{x}\right)'$$

$$= \frac{(-2-\ln x)'\times x-(-2-\ln x)\times(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{x}\times x-(-2-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-1+2+\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1+\ln x}{x^2}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

ج- لدينا على المجال $\left[\frac{1}{e},n\right]$: $f(x)\geq 0$

إذن :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx$$

$$= \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{n}$$

$$= \left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-(-e)$$

$$= e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}$$

د- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n} = e$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0 \end{cases}$

تصحيح التمرين الخامس

الجزء الأول :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

إذن من الواضح أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$

2) لدينا الدالة $u : x \mapsto x^2-2x+2$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$: $u(x)>0$

إذن الدالة $f=\ln(u)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(x^2-2x+2\right)\right)' \\ &= \frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \end{aligned}$$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x-2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x-2$	$-$	0	$+$

إذن على المجال $]-\infty,1]$: $f'(x)\leq 0$ و على المجال $[1,+\infty[$: $f'(x)\geq 0$

(3

✓ لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty \end{cases}$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

✓ لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty \end{cases}$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

(4

✓ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2.\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

✓ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2.\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}2\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

5) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

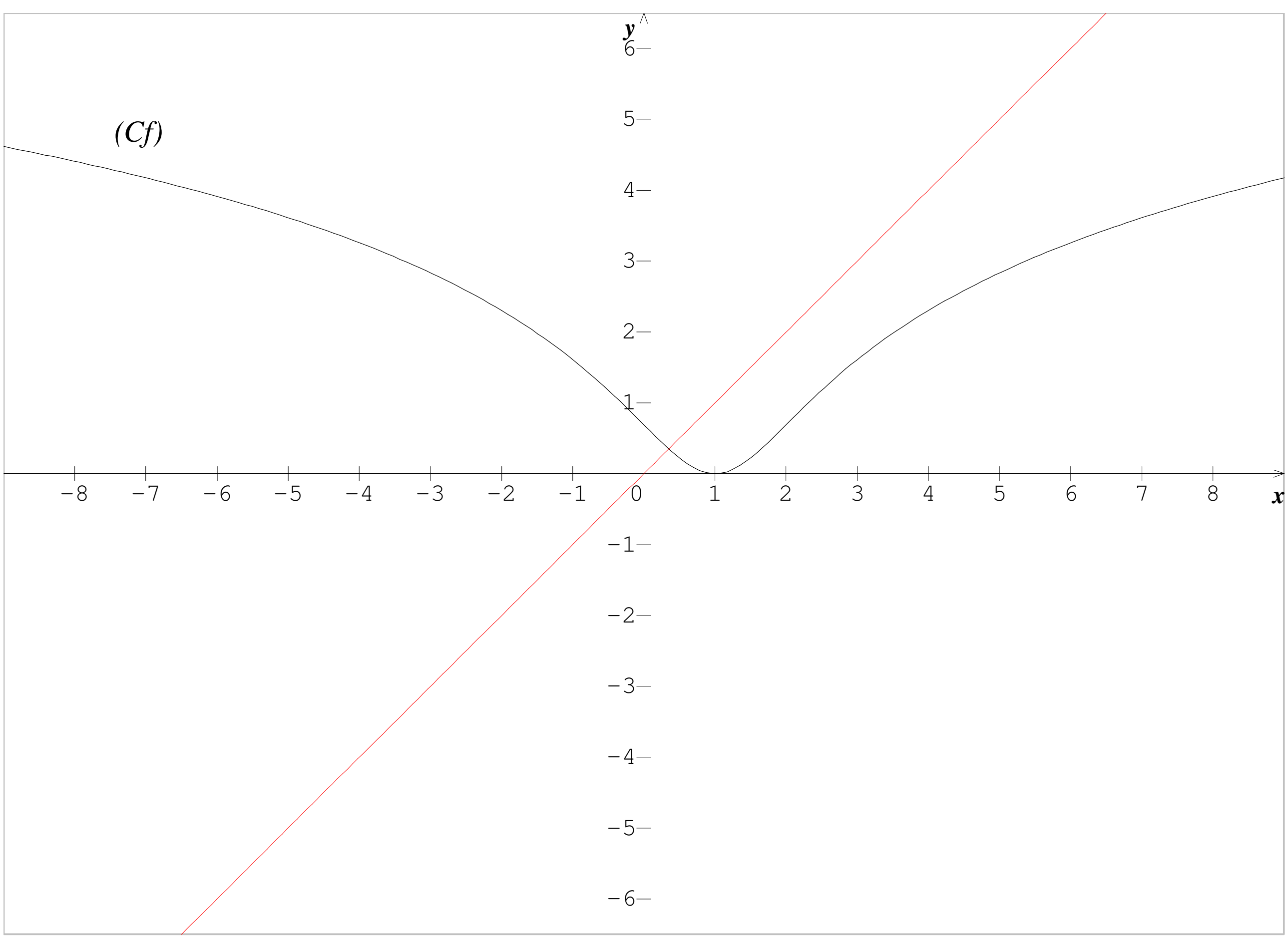
✓ لدينا : $2(1)-x = 2-x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\left(2(1)-x\right) &= f\left(2-x\right) \\ &= \ln\left(\left(2-x\right)^2-2\left(2-x\right)+2\right) \\ &= \ln\left(4-4x+x^2-4+2x+2\right) \checkmark \\ &= \ln\left(x^2-2x+2\right) \\ &= f\left(x\right) \end{aligned}$$

إذن : $\begin{cases} \left(\forall x\in\mathbb{R}\right) & 2(1)-x\in\mathbb{R} \\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\right) & f\left(2(1)-x\right)=f\left(x\right) \end{cases}$

و منه $\left(D\right): x=1$ هو محور تماثل ل $\left(C_f\right)$

(6



الجزء الثاني :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)-1\\ &= \frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1\\ &= \frac{2x-2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}\\ &= \frac{-x^2+4x-4}{x^2-2x+2}\\ &= \frac{-(x-2)^2}{x^2-2x+2}\end{aligned}$$

لدينا :
$$\begin{cases}\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) \leq 0\\ \varphi'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\end{cases}$$

إذن : φ تناقصية قطعا .

2) أ-
$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)-x = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases}\lim_{x \to -\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right) = +\infty\\ \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty\end{cases}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x)-x \\
&= \ln\left(x^2-2x+2\right)-x \\
&= \ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)-x \\
&= \ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-x \\
&= 2\ln(x)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-x \\
&= x\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right)
\end{aligned}$$

إذن : لكل $x>0$: $\varphi(x)=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]=-\infty$

ج-

✓ φ متصلة على $\mathbb{R}$

✓ φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ $0\in\varphi(\mathbb{R})=\varphi(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

إذن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

إذن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

و منه $(\Delta): y=x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α

✓

لدينا :

- φ متصلة على $[0,3;0,4]$
- $\varphi(0,3)\times\varphi(0,4)<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\varphi(0,3)>0\\ \varphi(0,4)<0\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $0,3<\alpha<0,4$

つづく