

فضاءات المتجهية الحقيقية

1 - تعريف وأمثلة :
1 - قانون تركيب خارجي :

a - تعريف :

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين
كل تطبيق f من $A \times E$ نحو E يسمى قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A
بتعبير آخر :

$$f : A \times E \rightarrow E$$

$$f \text{ قانون تركيب خارجي معرف على } E \text{ ذو المعاملات في } A \Leftrightarrow (\alpha, x) \rightarrow f(\alpha, x)$$

يرمز عادة للصورة $f(\alpha, x)$ بالرمز $\alpha \cdot x$ أو αx

b - أمثلة :

$$1 - \text{ لكل } \alpha \text{ من } IR \text{ و } M \text{ من } M_2(IR) \text{ حيث } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ لدينا } \alpha M = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(IR)$$

إذن : التطبيق : $f : IR \times M_2(IR) \rightarrow M_2(IR)$ قانون تركيب خارجي معرف على $M_2(IR)$ و معاملاته في IR
 $(\alpha, M) \rightarrow \alpha M$

2 - لكل α من IR و f من $F(I, IR)$ (مجموعة الدوال العددية المعرفة على مجال I ضمن IR نحو IR)
لدينا : $\alpha f \in F(I, IR)$

إذن : التطبيق $g : IR \times F(I, IR) \rightarrow F(I, IR)$ قانون تركيب خارجي معرف على $F(I, IR)$ و معاملاته في IR
 $(\alpha, f) \rightarrow \alpha f$

2 - تعريف الفضاء المتجهي :

a - تعريف :

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * و بقانون تركيب خارجي معاملاته في IR : $f : IR \times E \rightarrow E$
 $(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$

نقول أن : $(E, *, \cdot)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$1 - \text{ زمرة تبادلية } (E, *)$$

$$2 - (\forall (\alpha, \beta) \in IR^2)(\forall x \in E) \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$3 - (\forall (\alpha, \beta) \in IR^2)(\forall x \in E) \quad (\alpha \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$$

$$4 - (\forall \alpha \in IR)(\forall (x, y) \in E^2) \quad \alpha \cdot (x * y) = \alpha \cdot x * \alpha \cdot y$$

$$(\forall x \in E) \quad 1 \cdot x = x \quad -5$$

في ما تبقى من هذا الدرس نرسم للقانون الداخلي * بالرمز + و لكل عنصر x من E بالرمز \vec{x} و نسميه متجهة منه التعريف التالي للفضاء المتجهي $(E, +, \times)$

نقول أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$-1 \quad (E, +) \text{ زمرة تبادلية}$$

$$-2 \quad (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall \vec{x} \in E) \quad (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

$$-3 \quad (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall \vec{x} \in E) \quad (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$$

$$-4 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

$$-5 \quad (\forall x \in E) \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

b - قواعد الحساب في فضاء متجهي :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا الخاصيات التالية

$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$	1
المتجهة $\vec{b} + (-\vec{a})$ تسمى فرق المتجهتين \vec{a} و \vec{b} وتكتب كذلك $\vec{b} - \vec{a}$	
$(\alpha \in \mathbb{R}) (\forall x \in E) \quad \alpha \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ أو } \vec{x} = \vec{0}$	2
$(\alpha \in \mathbb{R}) (\forall x \in E) \quad (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$	3
$(\alpha \in \mathbb{R}) (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) \quad \alpha(\vec{y} - \vec{x}) = \alpha\vec{y} - \alpha\vec{x}$	4
$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall \vec{x} \in E) \quad (\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$	5

c - أمثلة و تمارين تطبيقية : (أنظر سلسلة التمارين)

II - الفضاء المتجهي الجزئي :

1 - تعريف :

ليكن $(E, +, \times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E

نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$-1 \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الداخلي } + \text{ أي : } (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2) \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$$

$$-2 \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الخارجي } \times \text{ أي : } (\forall \vec{x} \in F) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \vec{x} \in F$$

بتعبير آخر :

$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ F \subset E \\ (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2) \quad \vec{x} + \vec{y} \in F \\ (\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall x \in F) \quad \lambda \vec{x} \in F \end{cases}$	\Leftrightarrow	F فضاء متجهيا جزئيا من E
---	-------------------	--------------------------

2 - أمثلة :

$\{\vec{0}\}$ و E فضائين متجهيين جزئيين من الفضاء المتجهي $(E, +, \times)$	1
P_n مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من تساوي n فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي	2

$(F(IR, IR), +, \times)$	
$(\mathbb{R}^2, +, \times)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ (تحقق من ذلك)	3

3 - الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي:

ليكن $(E, +, \times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E

$$F \text{ فضاء متجهيا جزئيا من } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ (\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2) \quad \beta\vec{x} + \lambda\vec{y} \in F \end{cases}$$

III - التاليفات الخطية:

1 - تعريف:

لتكن \vec{x}_1 و \vec{x}_2 و \dots و \vec{x}_n متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و \dots و α_n أعدادا حقيقية. المتجهة $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ تسمى تاليفة خطية للمتجهات \vec{x}_1 و \vec{x}_2 و \dots و \vec{x}_n ذات المعاملات α_1 و α_2 و \dots و α_n ونقول كذلك أن الأسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ تولد المتجهة \vec{x} أو المتجهة \vec{x} مولدة بالأسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ ونقول عن أسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أنها تولد الفضاء المتجهي E ! فقط إذا كانت كل متجهة \vec{x} من E تكتب على شكل تاليفة خطية للمتجهات \vec{x}_1 و \vec{x}_2 و \dots و \vec{x}_n

بتعبير آخر:

$$\vec{x} \text{ مولدة بالأسرة } \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \Leftrightarrow B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \left(\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right) / \vec{x}$$

$$\text{الفضاء } E \text{ مولد بالأسرة } \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \Leftrightarrow B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \left(\forall \vec{x} \in E \right) \left(\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right) / \vec{x}$$

2 - تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعة E المعرفة بالصيغة التالية: $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$

1 - بين أن $(E, +, \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2 - لتكن $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 3, 1)$ متجهتين من E

بين أن الأسرة (\vec{e}_1, \vec{e}_2) تولد الفضاء المتجهي $(E, +, \bullet)$

3 - الارتباط و الاستقلال الخطي:

a - تعريف

لتكن $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E, +, \bullet)$

نقول أن:

الأسرة B مرتبطة خطيا أو مقيدة

$$\Leftrightarrow \left(\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right) / \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ و } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o}$$

الأسرة B مستقلة خطيا أو حرة $\Leftrightarrow \left(\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \right)$

b - مثال :

في الفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ نعتبر الأسرتين $B_1 = (L, J)$ و $B_2 = (L, J, K)$ بحيث :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{لدينا : } 2L + 3J = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = K$$

$$\text{إذن : } 2L + 3J - K = 0$$

ومنه الأسرة $B_2 = (L, J, K)$ مقيدة لأن : $2L + 3J - K = 0$ و $(2, 3, -1) \neq (0, 0, 0)$ من جهة أخرى لدينا :

$$\alpha L + \beta J = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \beta & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الأسرة $B_1 = (L, J)$ حرة

c - خاصيات :

إذا كانت B أسرة مقيدة فإن كل أسرة تتضمن B تكون كذلك مقيدة
إذا كانت B أسرة ضمن أسرة حرة فإن B تكون كذلك حرة

بتعبير آخر :

B أسرة مقيدة و $B \subset B'$ أسرة مقيدة
B أسرة حرة و $B' \subset B$ أسرة حرة

- 1 - إذا كانت في أسرة B متجهتان متساويتان فإن B تكون مقيدة
- 2 - إذا كانت إحدى متجهات أسرة B على شكل تآلفية خطية للعناصر الأخرى فإن B تكون مقيدة
- 3 - إذا كانت أسرة B حرة فإن جميع عناصرها غير منعدمة و مختلفة مثنى مثنى

4 - أساس فضاء متجهي حقيقي :

a - تعريف :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نقول أن أسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ من متجهات E أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$ إذا وفقط إذا كانت كل متجهة

من E تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تآلفية خطية لمتجهات الأسرة B

بتعبير آخر :

$$(\forall \vec{x} \in E) (\exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n) / \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Leftrightarrow E \text{ أساس للفضاء } B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

الأعداد الحقيقية α_1 و α_2 و \dots و α_n تسمى إحداثيات المتجهة \vec{x} بالنسبة للأساس $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$

b - مثال :

في $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ نعتبر المتجهات التالية : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ و $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$
 لنبين أن الأسرة $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

لتكن $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = (a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

$$= a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \quad \text{لدينا :}$$

$$= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

نفترض أنه توجد أعداد حقيقية أخرى a' و b' و c' بحيث : $\vec{x} = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{e}_3$

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{e}_3 \Rightarrow (a - a')\vec{e}_1 + (b - b')\vec{e}_2 + (c - c')\vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\text{ومنه : } (a - a')(1, 0, 0) + (b - b')(0, 1, 0) + (c - c')(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (a - a', 0, 0) + (0, b - b', 0) + (0, 0, c - c') = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (a - a', b - b', c - c') = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow a = a' \text{ و } b = b' \text{ و } c = c'$$

إذن كل متجهة من $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ تكتب بكيفية وحيدة على شكل تآليفة خطية لمتجهات الأسرة $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

و بالتالي $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

c - خاصيات :

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

1	$B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أساس للفضاء $E \Leftrightarrow B$ أسرة مولدة وحررة للفضاء المتجهي E
2	إذا كانت α_1 و α_2 و \dots و α_n إحداثيات متجهة \vec{x} و β_1 و β_2 و \dots و β_n إحداثيات متجهة \vec{y} فإن $\alpha_1 + \beta_1$ و $\alpha_2 + \beta_2$ و \dots و $\alpha_n + \beta_n$ إحداثيات المتجهة $(\vec{x} + \vec{y})$
3	إذا كانت α_1 و α_2 و \dots و α_n إحداثيات متجهة \vec{x} فإن إحداثيات المتجهة $\lambda\vec{x}$ هي : $\lambda\alpha_1$ و $\lambda\alpha_2$ و \dots و $\lambda\alpha_n$
4	جميع أساسات E مكونة من n متجهة $\Rightarrow \dim E = n$
5	(\vec{e}_1, \vec{e}_2) أساس للفضاء E ($\dim E = 2$) \Leftrightarrow حررة $\Leftrightarrow \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$
6	$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ أساس للفضاء E ($\dim E = 3$) \Leftrightarrow حررة $\Leftrightarrow \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \neq 0$
7	$B \Rightarrow \text{card}(B) = \text{card}(B')$ و B' أساسين للفضاء E