

La sphère الفلكة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
 الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
 ونرمز لها بـ : $S(A, R)$
 $S(A, R) = \{M \in \xi / AM = R\}$

معادلة فلكة :

(1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لتكن : $S(\Omega, R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ وشعاعها R حيث $R > 0$.

لدينا : $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega, R)$

أمثلة :

$$R=2, \quad \Omega(3,0,1) \quad (1)$$

$$S_1 : (x-3)^2 + (y)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$R=1, \quad \Omega(1,2,-3) \quad (2)$$

$$S_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$$

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \quad (3)$$

S_1 هي فلكة مركزها $\Omega\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$.

$$R=1 \quad \text{و} \quad \Omega(0,0,0) \quad (4)$$

$$S_4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ .

توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.

لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

لتكن : $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

و : $M(x, y, z)$

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

لدينا : $M \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو : $\frac{AB}{2}$.

(3) دراسة المعادلة : $(E): x + y + z - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

لدينا : $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$

الحالة ① : $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$

$$S = \emptyset$$

الحالة ② : $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$

$$S = \{\Omega(a, b, c)\}$$

الحالة ③ : $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

نضع : $R > 0$ حيث $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$S = S(\Omega(a, b, c), R)$$

مثال :

$$(E): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z - 3 = 0$$

ط1 :

لدينا :

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$d = -3$$

إذن : $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{17}{4} > 0$

إذن : S فلكة مركزها : $\Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

ط2 :

لدينا :

$$(E): x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 3$$

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow$$

$$S = S\left(\Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

II- تقاطع فلكة ومستوى : الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R .
لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S ،
نحسب المسافة d بين (P) و Ω .
 $d = d(\Omega, (P))$

الحالة ① : $d(\Omega, (P)) > R$

$$S \cap P = \emptyset$$

الحالة ② : $d(\Omega, (P)) = R$

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) .
في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

الحالة ③ : $d(\Omega, (P)) < R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H .

(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث :
 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

علما أن : $d = d(\Omega, (P)) = \Omega H$

مثال :

$$(P) : 2x - y + z + 1 = 0$$

$$S \{ \Omega, 2 \} \quad \text{و :}$$

$$\Omega(1, -1, 1) \quad \text{حيث :}$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} > 2$$

$$S \cap P = \emptyset \quad \text{إذن :}$$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R .
وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

ملاحظة :

$$\overrightarrow{\Omega A} \text{ منظمية على } (P).$$

مثال :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad \text{(S) فلكة معادلتها :}$$

$$A(1, 1, 0) \quad \text{و :}$$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

$$A \in S \quad \text{لدينا :}$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Omega(1, -1, 0) \quad \text{وبمأن :}$$

$$A(1, 1, 0)$$

$$M(x, y, z)$$

$$\overline{A\Omega}(0, -2, 0) \quad \text{فإن :}$$

$$\overline{AM}(x-1, y-1, z)$$

$$-2(y-1) = 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للكرة S في النقطة A .

III- تقاطع كرة ومستقيم :

مثال 1 :

أدرس تقاطع الكرة S والمستقيم (D) .

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و :}$$

لدراسة تقاطع الكرة (S) والمستقيم (D) ،

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نحل النظام :}$$

الجواب :

$$t^2 + (t+1)^2 + 4 - 3t + 2(t+1) - 8 - 5 = 0$$

$$2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2) \times (-6)$$

$$= 49 > 0$$

$$t_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$$

$$t_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الكرة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2, -1, 2)$

$$\text{و : } B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

مثال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والكرة (S) .

$$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = -4 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t+1 \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

الجواب :

$$(1+t-1)^2 + (-1+2t+1)^2 + t^2 = -4$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = -4$$

$$6t^2 = -4$$

$$6t^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = -96 < 0$$

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

ومنه :