

## المخروطيات المنحنيات من الدرجة الثانية

**مثال 1 :** الطريقة الأولى تعتمد على تغيير المعلم بتغيير الأساس

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ؛ نعتبر المجموعة :  $(E) = \{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$  .

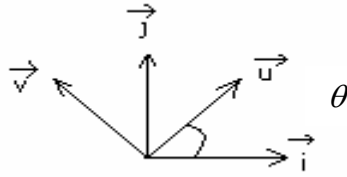
في المستوى المتجهي  $V_2$  ؛ نعتبر المتجهتين :  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$  و  $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$  .

1. حدد معادلة ديكارتية للمنحنى  $(E)$  في المعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  ثم استنتج طبيعة المنحنى  $(E)$  .

2. أنشئ المنحنى  $(E)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**الحل : تذكير :**

إذا كان  $(\vec{u}, \vec{v})$  و  $(\vec{i}, \vec{j})$  أساسان متعامدان ممنظمان حيث :  $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]$  و  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ؛ فإن :



$$\vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

في المثال ؛ لدينا :  $\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$  و  $\vec{v} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$  .

يتم اختيار  $\theta = \frac{\pi}{4}$  بحيث تكون معادلة  $(E)$  غير محتوية على الحد  $xy$  .

1. نعتبر  $M$  نقطة من المستوى  $P$  بحيث :

$(x, y)$  هو زوج إحداثيتي النقطة  $M$  بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  و  $(X, Y)$  هو زوج إحداثيتي النقطة  $M$  بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}X(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}Y(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}(X - Y)^2 + \frac{5}{2}(X + Y)^2 + \frac{6}{2}(X - Y)(X + Y) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(X^2 - 2XY + Y^2) + 5(X^2 + 2XY + Y^2) + 6(X^2 - Y^2) - 16 = 0 \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$\Leftrightarrow 16X^2 + 4Y^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

إن  $(E)$  إهليلج مركزه  $O(0, 0)$  ورؤوسه بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  هي :  $A(1, 0)$  و  $A'(-1, 0)$  و  $B(0, 2)$  و  $B'(0, -2)$  .

لدينا :  $a = 1$  و  $b = 2$  . بما أن  $a < b$  فإن :  $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$  ومنه فإن بؤرتي الإهليلج  $(E)$  بالنسبة للمعلم

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  هما  $F(0, \sqrt{3})$  و  $F'(0, -\sqrt{3})$  . ودليلاه هما :  $(D): Y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  و  $(D'): Y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$  .

تباعده المركزي هو :  $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وبما أن :  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$  فإن :  $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$  . إذن بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  نحصل على :

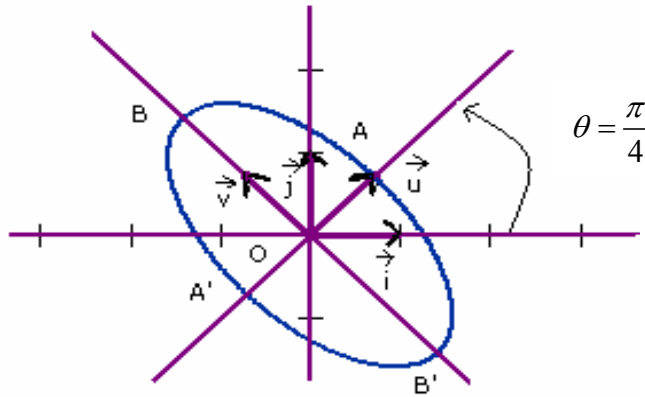
رؤوس  $(E)$  هي :  $A \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  و  $A' \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  و  $B \left( -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right)$  و  $B' \left( \sqrt{2}, -\sqrt{2} \right)$  .

بؤرتي  $(E)$  هما :  $F \left( -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$  و  $F' \left( \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$  .

دليلا  $(E)$  هما :  $(D) : \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  و  $(D') : \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

أي :  $(D) : -x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$  و  $(D') : x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

إنشاء الإهليلج  $(E)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :



## مثال 2 : الطريقة الثانية تعتمد على الدوران

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ؛ نعتبر المجموعة  $(E) = \{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$

ونعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $O(0,0)$  وزاويته  $\theta = \frac{\pi}{4}$  .

1. أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة  $[R(E)]$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ثم استنتج طبيعة  $[R(E)]$  .

2. حدد طبيعة المجموعة  $(E)$  ثم أنشئها في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**الحل :** لتكن  $M$  نقطة من المستوى  $P$  بحيث :

$(x, y)$  هو زوج إحداثياتي النقطة  $M$  بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  و  $(X, Y)$  هو زوج إحداثياتي النقطة  $M' = R(M)$  بالنسبة للمعلم

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  . لدينا :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \\ Y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases}$$

**تذكير :** الصيغة التحليلية للدوران  $R(O, \theta)$  هي :  $\begin{cases} X = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ Y = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$

لدينا  $M'(X, Y) \in R(E)$  إذن  $M'(x, y) \in E / M' = R(M)$  ومنه فإن :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases} \quad \text{و} \quad 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

إذن :  $5 \times \frac{1}{2}(X + Y)^2 + 5 \times \frac{1}{2}(-X + Y)^2 + 6 \times \frac{1}{2}(X + Y)(-X + Y) - 8 = 0$

أي :  $5(X^2 + Y^2 + 2XY) + 5(X^2 + Y^2 - 2XY) + 6(Y^2 - X^2) - 16 = 0$

يكافئ :  $4X^2 + 16Y^2 = 16$  وبالتالي فإن :  $\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1$  :  $[R(E)]$  . ومنه فإن  $(E') = R(E)$  إهليلج مركزه  $O(0,0)$

ولدينا :  $a = 2$  و  $b = 1$  إذن :  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$  . بالنسبة للمعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ؛ لدينا :

رؤوس  $(E')$  هي :  $A(2,0)$  و  $A'(-2,0)$  و  $B(0,1)$  و  $B'(0,-1)$  .

بؤرتي  $(E')$  هما :  $F(\sqrt{3},0)$  و  $F'(-\sqrt{3},0)$  .

التباعد المركز للإهليلج  $(E')$  هو :  $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  .

دليلا  $(E')$  هما :  $(D): x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  و  $(D'): x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$  .

2. إنشاء المجموعة  $(E)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

لدينا :  $(E) = R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)((E'))$  إذن :  $(E') = R\left(O, -\frac{\pi}{4}\right)((E))$  وبما أن  $(E')$  إهليلج فإن  $(E)$  هو أيضا إهليلج يستنتج من

الإهليلج  $(E')$  بالدوران الذي مركزه  $O(0,0)$  وزاويته  $\theta' = -\frac{\pi}{4}$  كما يلي :

