أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المتتاليات العددية

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

(1 $0\,,2\,,4\,,6\,,8\,,10\,,$ ....

(2 $6\,,3\,,0\,,-3\,,-6\,,-9\,,-12\,,$ ....

(3 $1\,,3\,,9\,,27\,,81\,,243\,,$ ....

(4 $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,$ ....

(5 $1\,,4\,,9\,,16\,,25\,,36\,,$ ....

الأجوبة:(1 $0\,,2\,,4\,,6\,,8\,,10\,,12\,,14\,,16\,,18$

(2 $6\,,3\,,0\,,-3\,,-6\,,-9\,,-12\,,-15\,,-18\,,-21\,,-24$

(3 $1\,,3\,,9\,,27\,,81\,,243\,,729\,,2187\,,6561\,,19683$

(4 $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,\frac{1}{64}\,,\frac{1}{128}\,,\frac{1}{256}\,,\frac{1}{512}$

(5 $1\,,4\,,9\,,16\,,25\,,36\,,49\,,64\,,81\,,100$

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n+3$

1)أحسب حدها الأول u_0

2)أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

الأجوبة:(1 $u_0=2\times0+3=3$

(2 $u_1=2\times1+3=5$ و $u_2=2\times2+3=4+3=7$

و $u_3=2\times3+3=9$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

تمرين3: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$ أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0

فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+3=2\times1+3=2+3=5$

اذن : $u_1=5$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+3=2\times5+3=10+3=13$ اذن : $u_2=13$

نعوض n ب 2

فنجد : $u_{2+1}=2\times u_2+3=2\times13+3=26+3=29$

اذن : $u_3=29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{n+1}{2n+1}$

1. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2}<u_n\le1$

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجوبة : أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $1-u_n=1-\frac{n+1}{2n+1}=\frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}\ge0$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le1$ ❶

أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2}<u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}>0$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{1}{2}<u_n$ ❷

وبالتالي من ❶ و ❷ نجد: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2}<u_n\le1$

2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة بالعدد الحقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة بالعدد الحقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول ان المتتالية العددية (u_n) محدودة

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=u_n^2+2u_n+2\\u_0=-1\end{cases}$$

1)أحسب u_1 2)بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1

الجواب:

(1 $u_{0+1}=u_0^2+2u_0+2=(-1)^2+2\times(-1)+2=1+-2+2=1$

1) يكفي أن نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_n-1=u_n^2+2u_n+2-1=u_n^2+2u_n+1=(u_n+1)^2\ge0$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n$ وبالتالي : (u_n) مصغورة بالعدد 1

تمرين6: أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n+3$$

الجواب : $u_{n+1}-u_n=2(n+1)+3-(2n+3)=2>0$

اذن: (u_n) تزايدية قطعا

تمرين7: أدرس رتابة المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{2}{n}$

الجواب :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-2}{n(n+1)}<0$$

اذن: (v_n) تناقصية قطعا

تمرين8: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{-n}{n+2}$

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right)-\left(\frac{-n}{n+2}\right)=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}$$

ا $u_{n+1}-u_n=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}=\frac{(-n-1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-2}{(n+3)(n+2)}<0$

ذن $u_{n+1}\le u_n$ وبالتالي (u_n) تناقصية قطعا

تمرين9: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=\frac{5n-3}{2n+7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ واستنتج أن : $u_n\ge-\frac{3}{7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)}{2n+9}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)(2n+7)-(2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}$$

اذ $u_{n+1}-u_n=\frac{10n^2+35n+4n+14-10n^2+6n-45n+27}{(2n+9)(2n+7)}=\frac{41}{(2n+9)(2n+7)}\ge0$

ن $u_{n+1}-u_n\ge0$ وبالتالي (u_n)

بما أن (u_n) تزايدية فان : $u_n\ge u_0$ يعني $u_n\ge-\frac{3}{7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين10: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\ u_0=3\end{cases}$$

1. بين أن المتتالية (u_n)مصغورة بالعدد 2
2. بين أن المتتالية (u_n)مكبورة بالعدد 4
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة :1) ◎ يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\le u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\ge2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge2$

اذن : $u_n-2\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge2$

2)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\le4$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le4$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le4$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le4$

اذن : $4-u_n\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $4-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$

2) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

(3 $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+6u_n-8$ نحسب المميز Δ

$\Delta=36-32=4>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$

ومنه التعميل : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

لدينا : $u_n\ge2$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-2\ge0$

و لدينا : $u_n\le4$ اذن : $u_n-4\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين11: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}\\ u_0=1\end{cases}$$

1. بين أن المتتالية (u_n)مصغورة بالعدد 1
2. بين أن المتتالية (u_n)مكبورة بالعدد 2
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة :1) ◎ يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge1$

◎نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1=\frac{4u_n-2-(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-3}{u_n+1}$

$u_{n+1}-1=\frac{3(u_n-1)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge1$

2)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le2$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{4u_n-2}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-(4u_n-2)}{u_n+1}=\frac{-2u_n+4}{u_n+1}$

$2-u_{n+1}=\frac{2(2-u_n)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le2$

اذن : $2-u_n\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $2-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le2$

3) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

4) $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+3u_n-2$ نحسب المميز Δ

$\Delta=9-8=1>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-3+1}{-2}=1$ و $x_2=\frac{-3-1}{-2}=2$

ومنه التعميل : $-u_n^2+3u_n-2=-(u_n-1)(u_n-2)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$

لدينا : $u_n\ge1$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-1\ge0$

و لدينا : $u_n\le2$ اذن : $u_n-2\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

<u>تمرين12:</u> نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{n+3}{4}$$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

<u>الجواب</u> : $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)+3}{4}-\frac{n+3}{4}=\frac{1}{4}=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4}=r$

وحدها الأول : $u_0=\frac{3}{4}$

<u>تمرين13:</u> لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و $u_6=31$

1)أحسب u_0 2)أكتب u_n بدلالة n 3)أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

<u>أجوبة :1)</u> لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_6=u_0+6\times\frac{1}{2}$ **يعني** $31=u_0+3$ **يعني** $28=u_0$

2) $u_n=u_0+nr$ يعني $u_n=28+\frac{n}{2}$

3) $u_{2015}=28+\frac{2015}{2}=\frac{2071}{2}$

و $u_{2016}=28+\frac{2016}{2}=28+1008=1036$

<u>تمرين14:</u> لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0=5$

و $u_{100}=-45$

1)حدد r 2)أحسب : u_{2015} و u_{2016}

<u>أجوبة :</u>1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_{100}=u_0+100r$ **يعني** $-45=5+100r$

يعني $-50=100r$ **يعني** $r=-\frac{1}{2}$

2) (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$ يعني $u_{2015}=5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015}=5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015}=\frac{10-2015}{2}=\frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016}=\frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2}=\frac{-2006}{2}=-1003$

<u>تمرين15:</u> نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{u_n+1}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$
4. أكتب v_n بدلالة n
5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

<u>أجوبة :</u> $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$

1) نعوض n ب0

$u_{0+1}=\frac{-1}{2+u_0}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$ اذن : $u_1=-\frac{1}{4}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{-1}{2+u_1}=\frac{-1}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{7}{4}}=\frac{-4}{7}$ اذن : $u_2=-\frac{4}{7}$

نعوض n ب 0 في $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فنجد : $v_0=\frac{1}{u_0+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=\frac{1}{u_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$

نعوض u_{n+1} ب $\frac{-1}{2+u_n}$

فنجد: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+1}=1$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

3)أ) لدينا : $u_0=2$ و $\frac{-3\times0+2}{2\times0+1}=\frac{2}{1}=2$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

ج) نبين أن: $u_{n+1}=\frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن : $u_{n+1}=-\frac{3n+1}{3n+4}$ ؟؟؟

لدينا : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض الترجع

لدينا : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

اذن : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}=\frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}}=\frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}=-\frac{3n+1}{3n+4}$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

4)بما أن: (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=\frac{1}{3}+n$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}+n$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}+n}-1=\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}-1=\frac{3}{3n+1}-1=\frac{3-3n-1}{3n+1}=\frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين16: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n-1}{3+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n)المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{1+u_n}$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : (1 $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

(2 بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$$

تمرين17: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n وأوجد الحد التاسع
2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

أجوبة 1): وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times8+5=29$

(2 $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

ومنه $S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ نحسب: $u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

تمرين18:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

أجوبة 1) $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

(2 $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي: $S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$

تمرين19: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2\times3^n$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ وماذا تستنتج ؟

أجوبة 1) $u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و $u_3=2\times3^3=54$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

أستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$هندسية

أساسها $q=3$وحدها الأول $u_0=2$

تمرين20: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$

بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=5\times3^{2n+1}$

بين أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

الجواب : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times 3^{2n+3}}{5\times 3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=9$ وحدها الأول $u_0=15$

تمرين21: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث :

$u_2=\frac{9}{2}$ و $u_5=\frac{243}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

أجوبة لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n=u_mq^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5=u_2q^{5-2}$ يعني : $\frac{243}{2}=\frac{9}{2}q^3$

يعني $q^3=\frac{243}{9}$ يعني : $q^3=27$ يعني : $q=3$

لدينا أيضا : $u_n=u_2q^{n-2}$

يعني : $u_n=\frac{9}{2}3^{n-2}=\frac{3^2\times 3^{n-2}}{2}=\frac{3^{n-2+2}}{2}=\frac{3^n}{2}$

تمرين22: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=81$

وأساسها : $q=\frac{1}{3}$

1) أكتب u_n بدلالة n 2) أحسب u_1 و u_2 و u_3

3) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=1$

أجوبة 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=81$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ ومنه: $u_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_3=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{81}{27}=3$

3) $u_n=1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n}=1$ يعني $\frac{81}{3^n}=1$ يعني

$81=3^n$ يعني $n=4$

تمرين23: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=5$

و $u_3=40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=2$
2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=160$

أجوبة 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3=u_0q^{3-0}$ يعني : $40=5q^3$ يعني : $q^3=\frac{40}{5}$ يعني :

$q^3=8$ يعني : $q=2$

2) $u_n=5\times(2)^n$

$u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و

$u_4=5\times(2)^4=5\times16=80$

3) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_5=2\times u_4=2\times80=160$ ومنه : $n=5$

تمرين24: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية

: $u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5$

أجوبة 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times u_n}{u_n}=3=q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

2) $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\frac{1-3^5}{1-3}=9\times\frac{1-3^5}{-2}=9\times\frac{1-243}{-2}=9\times\frac{-242}{-2}=1029$

تمرين25: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5=486$

و $u_7=4374$ و أساسها $q\succ 0$

1) حدد أساس المتتالية (u_n) 2) أحسب u_0 و u_{10}

3) أكتب u_n بدلالة n 4) أحسب **المجموع التالي** : $S=u_0+u_5+\cdots+u_{2009}$

أجوبة : 1) (u_n) متتالية هندسية اذن:

$u_7=u_5q^{7-5}$ يعني : $q^2=\frac{4374}{486}=9$

يعني : $q=3$ أو $q=-3$ وحسب المعطيات : $q\succ 0$

اذن: $q=3$

2) (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_5=u_0q^{5-0}$

يعني $486=u_03^5$ يعني $u_0=\frac{486}{3^5}=\frac{486}{243}=2$

يعني $u_{10}=u_7q^{10-7}$ يعني $u_{10}=u_7q^3$

$u_{10}=4374\times3^3=4374\times27=118098$

3) $u_n=u_0q^{n-0}$ يعني $u_n=2\times3^n$

4) $S_n=u_0+u_1+u_1+\cdots+u_{2009}=u_0\times\frac{1-q^{20095-0+1}}{1-q}=u_0\times\frac{1-q^{2010}}{1-q}$

$S_n=2\times\frac{1-3^{2010}}{1-3}=-\left(1-3^{2010}\right)=3^{2010}-1$

تمرين26: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1 \\ u_0=10 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن : $u_n\geq 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
4. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

5. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n
6. أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

أجوبة: 1) نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن : $u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1 1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ اذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=10\geq3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\geq3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\geq3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2=\frac{2}{3}(u_n-3)$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\geq3$

اذن : $u_n-3\geq0$ منه $u_{n+1}-3\geq0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq3$

3) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+1=-\frac{1}{3}(u_n-3)$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq3$ حسب السؤال 2) اذن : $u_{n+1}-u_n\leq0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

4) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=7$

5) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_0=7$ فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $v_n+3=u_n$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$

6) $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n=7\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=21\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين27: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{6}{1+u_n}\\u_0=3\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

أجوبة 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_1=\frac{6}{1+u_0}=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ اذن : $u_1=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$ و $v_1=\frac{u_1-2}{u_1+3}=\frac{\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{6}+3}=\frac{\frac{-11}{6}}{\frac{19}{6}}=-\frac{11}{19}$

2) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{6}{1+u_n}-2}{\frac{6}{1+u_n}+3}=\frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}}=\frac{\frac{6-2-2u_n}{1+u_n}}{\frac{6+3+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{4-2u_n}{1+u_n}}{\frac{9+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{-2(u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{3(3+u_n)}{1+u_n}}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}=\frac{-2}{3}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

3) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

فان: $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_nu_n+3v_n-u_n=-2\Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-2\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$

$$u_n=\frac{2+3v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-2-3v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-3v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{2+3\times\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$$u_n=\frac{2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

4) $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين28: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}\\u_1=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_2 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة 1) $u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ و $v_1=\frac{1}{u_1}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n-1}{u_n}=1=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

فان : $v_n=v_1+(n-1)r$ أي : $v_n=1+(n-1)$ يعني $v_n=n$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=n$ اذن : $u_n=\frac{1}{n}$

تمرين29: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+2u_n}\\u_0=1\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة 1) $u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ و $v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n-1}{u_n}=2=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+2n$

ونعلم أن: $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=1+2n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1+2n}$

تمرين30: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{u_n+1}\\u_0=3\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
5. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
6. أحسب المجموع التالي : $S_2=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{11}$

أجوبة 1) $u_1=\frac{5u_0-4}{u_0+1}=\frac{15-4}{3+1}=\frac{11}{4}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{3-2}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}$

$u_{n+1}-2=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 2$

اذن : $u_n-2\ge 0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n-4}{u_n+1}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1-3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ يعني $u_n-2=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+2$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{3}}+2=\frac{1}{\frac{n+3}{3}}+2=\frac{3}{n+3}+2=\frac{3+2n+6}{n+3}=\frac{9+2n}{n+3}$$

5) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}$$

$u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n^2-4u_n+4}{u_n+1}=-\frac{(u_n-2)^2}{u_n+1}\le 0$ لأن : $-(u_n-2)^2\le 0$

و $u_n+1>0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

6) $S=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{11}=11\times\frac{(v_1+v_{11})}{2}$

لدينا : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن : $v_1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ و $v_2=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$

$$S=11\times\frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{14}{3}\right)}{2}=11\times\frac{18}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{198}{3\times 2}=33$$

تمرين31: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}\\u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1) $u_1=\frac{5u_0-1}{u_0+3}=\frac{10-1}{2+3}=\frac{9}{5}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1} \ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\frac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{4u_n-4}{u_n+3}=\frac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n \ge 1$

اذن : $u_n-1\ge 0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين32: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=-1-\frac{1}{4u_n}\\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : (v_n) متتالية حسابية
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1) $u_1=-\frac{3}{2}$ و $u_2=-\frac{5}{6}$ و $u_{13}=-\frac{7}{10}$

2) $v_{n+1}-v_n=-2$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=-2n+1$

نعلم أن : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{2}$ يعني $u_n=\frac{1}{-2n+1}-\frac{1}{2}$

تمرين33: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>1$
2. أبين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2>1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n}{2u_n+3}-1=\frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}=\frac{3u_n-3}{2u_n+3}=\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $2u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين34: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}\\ u_0=\frac{7}{3}\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=\frac{7}{3}\ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1=\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}=\frac{4u_n-4}{3u_n+7}=\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n > 1$

اذن : $u_n - 1 > 0$ و $3u_n + 7 > 0$ و منه $u_{n+1} - 1 \geq 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 1$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{7u_n+3}{3u_n+7} - u_n = \frac{7u_n+3-u_n(3u_n+7)}{3u_n+7} = \frac{-3u_n^2+3}{3u_n+7}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{-3(u_n+1)(u_n-1)}{3u_n+7}$$

ولدينا : $u_n \geq 1$ اذن : $u_n+1 \geq 0$ و $u_n - 1 \geq 0$ و $3u_n+7>0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n \leq 0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

3) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1}{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}+1} = \frac{\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}}{\frac{7u_n+3+(3u_n+7)}{3u_n+7}} = \frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}} = \frac{4u_n-4}{10u_n+10}$$

$$v_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{10(u_n+1)} = \frac{2}{5}\frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{2}{5}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$

وحدها الأول $$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{7}{3}+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{2}{5}$$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=\frac{2}{5}$

فان: $v_n = \frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n u_n + v_n - u_n = -1 \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -1-v_n \Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ اذن : $$u_n = \frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$$

تمرين35: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n+3}{u_n+3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\leq u_n \leq 3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n \in\mathbb{N}\ 0\leq u_n$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1 \geq 0$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n \geq 0$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\geq 0$ ؟؟؟؟؟

حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \geq 0$ اذن : $u_{n+1}\geq 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n\geq 0$

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq 3$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1\leq 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\leq 3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\leq 3$ ؟؟؟؟؟ نحسب الفرق:

$$3-u_{n+1} = 3-\frac{5u_n+3}{u_n+3} = \frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-2u_n+6}{u_n+3} = \frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\leq 3$

اذن : $u_n - 3\leq 0$ و $u_n+3>0$ لأن $u_n\geq 0$ و منه $3-u_{n+1}\geq 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n\leq 3$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n = \frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

نعمل $-u_n^2+2u_n+3$ نحسب المميز Δ

$\Delta = 4+12=16>0$ هناك جذرين : $x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1$ و $x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3$

ومنه التعميل : $-u_n^2+2u_n+3 = -(u_n-3)(u_n+1)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n = \frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}$

لدينا : $u_n\geq 0$ اذن : $u_n+3\geq 0$ و $u_n+1\geq 0$

و لدينا : $u_n\leq 3$ اذن : $u_n-3\leq 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n = \frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\geq 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1} = \frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}} = \frac{2u_n-6}{6u_n+6}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)} = \frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0-3}{u_0+1} = \frac{1-3}{1+1} = -1$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

فان: $v_n = (-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-3 \Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$

$$u_n = \frac{3+v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -3-v_n \Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $$u_n = \frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$