المتتاليات العددية

حلــول مقترحة

تمرين 1

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$

تمرين 2

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$	$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$ $u_1 = 1 + 1 = 2$	$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$ $u_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

لاحظ : أن حساب u_3 يرجع إلى حساب u_2 و u_1 و u_0 بالضرورة ، و لذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.

تمرين 3

1

$u_0 = 4$	$u_1 = 2u_0 - 1$ $u_1 = 8 - 1 = 7$	$u_2 = 2u_1 - 1$ $u_2 = 14 - 1 = 13$	$u_3 = 2u_2 - 1$ $u_3 = 26 - 1 = 25$
$v_0 = 3\times 2^0 + 1$ $v_0 = 3 + 1 = 4$	$v_1 = 3\times 2^1 + 1$ $v_0 = 6 + 1 = 7$	$v_2 = 3\times 2^2 + 1$ $v_2 = 12 + 1 = 13$	$v_3 = 3\times 2^3 + 1$ $v_3 = 24 + 1 = 25$

2

لنبين بالترجع أن : $u_n = 3\times 2^n + 1 \qquad \forall\, n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، **لدينا :** $u_0 = 4$ **و** $3\times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ **منه :** $u_0 = 3\times 2^0 + 1$

نفترض أن : $u_n = 3\times 2^n + 1$ **و نبين أن :** $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + 1$

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3\times 2^n + 1) - 1 = 2\times 3\times 2^n + 2 - 1 = 3\times 2^{n+1} + 1$

لاحظ : أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية ، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها .

تمرين 4

1

$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$	$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_3 = 3u_2 - 4$ $u_3 = 87 - 4 = 83$

2

لنبين بالترجع أن $u_n > 2 \qquad \forall\, n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، **لدينا :** $u_0 = 5$ **منه :** $u_0 > 2$

نفترض أن : $u_n > 2$ **و نبين أن :** $u_{n+1} > 2$

لدينا : $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$

3

لدينا : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0 \qquad \forall\, n \in IN$ ، **إذن** (u_n) **تزايدية**

لاحظ : أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 5

1	$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \end{cases}$
2	لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2$ $\forall n \in IN$ بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$ نفترض أن : $u_n \geq 2$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$ لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2+u_n)(2-u_n)}{2u_n}$ و بما أن $u_n \geq 2$ (حسب الافتراض) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2\ u_n > 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي : (u_n) تناقصية
	: لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

تمرين 6

1		$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$
	أ	لدينا $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$ و بما أن : $\forall n \in IN \quad (u_n - 3)(2u_n + 3) = 2u_n^2 + 3u_n - 6u_n - 9 = 2u_n^2 - 3u_n - 9$ فإن : $\boxed{\forall n \in IN \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}}$
	ب	لنبين بالترجع أن $u_n \geq 3$ $\forall n \in IN$ بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ منه : $u_0 \geq 3$ نفترض أن : $u_n \geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 3$ و بما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ إذن حسب السؤال السابق $u_{n+1} - 3 \geq 0$ و بالتالي : و منه : $u_{n+1} \geq 3$
2	أ	لدينا $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$ و بما أن : $\forall n \in IN \quad (u_n - 3)(u_n + 1) = u_n^2 + u_n - 3u_n - 3 = u_n^2 - 2u_n - 3$ فإن : $\boxed{\forall n \in IN \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}}$
	ب	بما أن $u_n \geq 3$ فإن : $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و بالتالي : (u_n) تزايدية
		: لاحظ تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4

تمرين 7

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

لنبين بالترجع أن $u_n \leq 4 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 1$ منه : $u_0 \leq 4$

نفترض أن : $u_n \leq 4$ و نبين أن : $u_{n+1} \leq 4$

لدينا : $u_n \leq 4 \Rightarrow 2u_n \leq 8 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq 16 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq \sqrt{16} \Rightarrow u_{n+1} \leq 4$

: يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي:

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{2u_n + 8} - 4 = \frac{2u_n + 8 - 16}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} = \frac{2(u_n - 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} \leq 0$$

تمرين 8

لندرس رتابة المتتاليات التالية

$\forall n \in IN \; u_n = \dfrac{2n}{n+1}$ ، لدينا لكل $n \in IN$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = 2\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = 2\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 2\,\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 2\,\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$\boxed{\text{إذن } (u_n) \text{ تزايدية}}$

$\forall n \in IN^* \; v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ ، لدينا لكل $n \in IN^*$

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

$\boxed{\text{إذن } (v_n) \text{ تزايدية}}$

$\forall n \in IN \; w_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ ، لدينا لكل $n \in IN$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{n+2-3n-3}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} < 0$$

$\boxed{\text{إذن } (w_n) \text{ تناقصية}}$

$\forall n \in IN^* \; w_n = n^3 - n$ ، لدينا لكل $n \in IN^*$

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^3 - (n+1) - (n^3 - n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - n^3 + n = 3n^2 + 3n > 0$$

$\boxed{\text{إذن } (w_n) \text{ تزايدية}}$

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$ ، لدينا لكل $n \in IN$ ، $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$

$\boxed{\text{إذن } (u_n) \text{ تزايدية}}$

تمرين 9

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=2$ و أساسها $r=3$

1 لدينا : $\boxed{u_7=u_0+7r=2+21=23}$ و $\boxed{u_{11}=u_0+11r=2+33=35}$

2 $$\boxed{S=u_0+u_1+\ldots+u_{99}=\frac{u_0+u_{99}}{2}\times100=100\times\frac{2+u_0+99r}{2}=50(2+2+297)=50\times301=15050}$$

: 100 تمثل عدد الحدود $(99-0+1=100)$

تمرين 10

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-1$.

1 نعلم أن : $u_{10}=u_0+10r$ منه : $u_{10}-u_0=10r$ منه : $\boxed{r=\frac{u_{10}-u_0}{10}=\frac{59-(-1)}{10}=\frac{60}{10}=6}$

2 $$\boxed{S=u_3+u_4+\ldots+u_{22}=\frac{u_3+u_{22}}{2}\times20=20\times\frac{u_0+3r+u_0+22r}{2}=10(-1+18-1+132)=10\times148=1480}$$

: 20 تمثل عدد الحدود $(22-3+1=20)$

تمرين 11

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r

1 نعلم أن : $u_3=u_0+3r$ منه : $u_0+3r=12$

و نعلم أن : $u_{17}=u_0+17r$ منه : $u_0+17r=82$

نحصل على النظمة :

$$\begin{cases}u_0+3r=12\\u_0+17r=82\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_0=12-3r\\12-3r+17r=82\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_0=12-3r\\14r=82-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_0=12-3\times5\\r=\frac{70}{14}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_0=-3\\r=5\end{cases}$$

2 $$\boxed{S=u_0+u_4+\ldots+u_n=\frac{u_0+u_n}{2}\times(n+1)=(n+1)\times\frac{u_0+u_0+rn}{2}=(n+1)\times\frac{-3-3+5n}{2}=\frac{(n+1)(5n-6)}{2}}$$

: n+1 تمثل عدد الحدود $(n-0+1=n+1)$

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $r=2$

1 لدينا : $\boxed{u_3=u_0\times r^3=3\times2^3=3\times8=24}$ و $\boxed{u_6=u_0\times r^6=3\times2^6=3\times64=192}$

2 $$\boxed{S=u_0+u_1+\ldots+u_5=u_0\times\frac{1-r^6}{1-r}=3\times\frac{1-2^6}{1-2}=3\times\frac{1-64}{-1}=3\times63=189}$$

: u_0 تمثل أول حدود المجموع S و 6 تمثل عدد الحدود $(5-0+1=6)$

تمرين 13

(u_n) هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$

1	لدينا : $u_3 = u_0 \times r^3$ منه $\boxed{u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}} = 5}$
2	$\boxed{S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = \left(u_0 \times r^1\right) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 5\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$
	: u_1 تمثل أول حدود المجموع S و n عدد الحدود $(n-1+1=n)$

تمرين 14

$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$ و $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

1	لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$ $= \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(-3+u_n)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{1}{3}$ بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$
2	$\boxed{v_n = v_0 + rn = \frac{-1}{4} + \frac{1}{3}n = \frac{4n-3}{12}}$
3	لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n-3}$ منه : $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$ منه : $\boxed{u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{12}{4n-3} + 3 = \frac{12+12n-9}{4n-3} = \frac{12n+3}{4n-3}}$
4	$\boxed{S = v_0 + v_2 + \ldots + v_6 = \frac{v_0+v_6}{2} \times 7 = \frac{\frac{-1}{4} + \frac{4\times 6-3}{12}}{2} \times 7 = \frac{\frac{-3+24-3}{12}}{2} \times 7 = \frac{18}{24} \times 7 = \frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}}$

تمرين 15

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \quad n \geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n - \frac{5}{3}$$

1 لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(v_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

2

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

و لدينا : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ منه : $\boxed{u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}}$

3

$$\boxed{S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

تمرين 16

$$\begin{cases} u_0 = 1 \,,\, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$	$u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{33}{4} - \frac{4}{2} = \frac{25}{4}$	$v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$	$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$

2

$$\boxed{v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$

3 لدينا $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$

4 لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{u-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 3\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

إذن : $\boxed{u_n = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}}$

: يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 و مقارنتها بنتائج السؤال الأول

تمرين 17

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n + v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1

$$u_1 = \frac{2\,u_0 + v_0}{3} = \frac{2+7}{3} = 3$$

$$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$u_2 = \frac{2\,u_1 + v_1}{3} = \frac{6+4}{3} = \frac{10}{3}$$

$$v_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

2

$$\boxed{v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = \frac{1}{2}v_n}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$

3

لدينا $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$

4

لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{u-1} = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

إذن : $\boxed{u_n = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \dfrac{6}{2^n} + 1 = 7 - \dfrac{6}{2^n}}$

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 و مقارنتها بنتائج السؤال الأول :

تمرين 18

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2\,v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4\,v_n}{5} \end{cases}$$

1

لدينا :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2\,v_n}{3} = \frac{3\,u_n + 12\,v_n - 5\,u_n - 10\,v_n}{15} = \frac{2\,v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15}\,w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{5}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1}$

منه : $\boxed{\forall\, n \in IN \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10\,v_{n+1} = u_n + 2\,v_n + 2(u_n + 4\,v_n) = u_n + 2\,v_n + 2\,u_n + 8\,v_n = 3\,u_n + 10\,v_n = t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة، منه : $\boxed{\forall\, n \in IN \quad t_n = t_0 = 3\,u_0 + 10\,v_0 = 3 + 20 = 23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3\,u_n + 10\,v_n = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3\,u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3\,u_n + 10\,w_n + 10u_n = t_n \end{cases}$

منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13\,u_n = t_n - 10\,w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = \dfrac{t_n + 3\,w_n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} \end{cases}$

بالتالي :	$\begin{cases} v_n = \dfrac{23+3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{13} \\ u_n = \dfrac{23-10\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{13} \end{cases}$

: لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل نظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n و اعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

تمرين 19

1

نعلم أن : $u_3+u_4+u_5 = u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r = 3u_0+12r$ و $u_6 = u_0+6r$

لدينا : $u_3+u_4+u_5 = -9$ و $u_6 = -7$

إذن نحصل على النظمة : $\begin{cases} u_0 + 6r = -7 \\ 3u_0+12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7-6r \\ 3(-7-6r)+12r = -9 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} u_0 = -7-6r \\ -21-18r+12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7-6r \\ -6r = -9+21 = 12 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7+12 = 5 \\ r = \dfrac{12}{-6} = -2 \end{cases}$

2

$$S = u_0+u_1+\ldots+u_{100} = \frac{u_0+u_{100}}{2}\times 101 = 101\frac{5+u_0+100r}{2} = 101\frac{5+5-200}{2} = 101\times\frac{-190}{2}$$

$$S = 101\times(-95) = -9\,595$$

تمرين 20

1

$$S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1} = v_0\times\frac{1-r^n}{1-r} = 3\times\frac{1-2^n}{1-2} = 3\frac{1-2^n}{-1} = 3(2^n-1)$$

2

أ

لدينا $v_{n+1} = 2v_n$ منه : $r=2$ متتالية هندسية أساسها

منه : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2v_n)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$ إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$

ب

لدينا :

$$T_n = v_0^2+v_1^2+\ldots+v_{n-1}^2 = w_0+w_1+\ldots+w_{n-1} = w_0\frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2\frac{1-4^n}{1-4} = 9\frac{1-4^n}{-3} = 9\frac{4^n-1}{3} = 3(4^n-1)$$

تمرين 21

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1} \end{cases}$$

1

$u_1 = \dfrac{u_0}{0+1} = 2$

$u_2 = \dfrac{u_1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\dfrac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

بالتالي : $\boxed{\forall\, n \in IN \quad u_n > 0}$

3

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n\left(\dfrac{1}{3n+1} - 1\right) = u_n \dfrac{1-3n-1}{3n+1} = -\dfrac{3\,n u_n}{3n+1} \leq 0$

بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

4

أ

لدينا $\dfrac{1}{4} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \dfrac{3n-3}{4(3n+1)} = \dfrac{3(n-1)}{4(3n+1)}$

إذن لكل $n \in IN^*$ لدينا $\dfrac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0$ و منه $\boxed{\forall\, n \in IN^* \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{4}}$

ب

لدينا حسب السؤال السابق : $\dfrac{u_2}{u_1} \leq \dfrac{1}{4}$ و $\dfrac{u_3}{u_2} \leq \dfrac{1}{4}$ و ... و $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{1}{4}$

و بضرب هذه المتفاوتات(ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن : $\dfrac{u_2}{u_1} \times \dfrac{u_3}{u_2} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

أي : $\dfrac{u_n}{u_1} \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} u_0$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \times 2$ منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} \times 4 \times 2$

بالتالي : $\boxed{\forall\, n \in IN^* \quad u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}}$

تمرين 22

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} \end{cases}$$

1

بالنسبة لـ $n=0$ **، لدينا :** $|u_0| = 0$ **منه** $|u_0| < \frac{1}{2}$

نفترض أن $|u_n| < \frac{1}{2}$ **و نبين أن** $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}$

لدينا : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

$$|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_{n+1} < \frac{-1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow |u_{n+1}| < \frac{1}{2}$$

بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \ \ |u_n| < \frac{1}{2}}$

2

لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$ **و بما أن** $|u_n| < \frac{1}{2}$ **فإن** $u_n^2 < \frac{1}{4}$ **أي :** $u_n^2 - \frac{1}{4} < 0$

بالتالي (u_n) **متتالية تناقصية.**

3

بالنسبة لـ $n=0$ **، لدينا :** $\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^0} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^1 = u_0 + \frac{1}{2}$

نفترض أن $u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$ **و نبين أن:** $u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

لدينا :

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$$

$$= \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \ \ u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}}$