ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و (C_f) منحناها في (م . م . م) معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. الدالة المشتقة الثانية وتطبيقاتها:

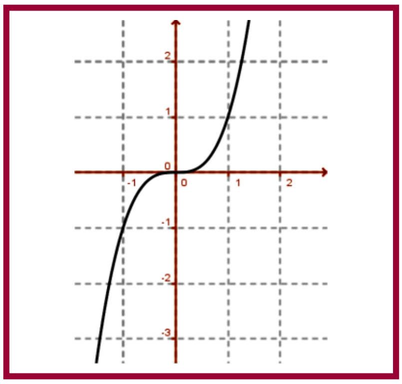
A) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس ل (C_f) في نقطة x0

1. خاصية :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و x_0 من I .

- إذا كان $f''(x_0) \geq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد فوق المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .
- إذا كان $f''(x_0) \leq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد تحت المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$ ‖ $-$	0	$+$
تقعر (C_f)	$\cap$	$\cup$		$\cap$	$\cup$



2. مثال: لنعتبر الدالة: $f(x)=x^3$

1) أحسب: $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0,+\infty[$ ثم على $]-\infty,0]$.

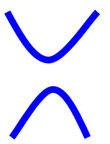
B) تقعر منحنى (C_f) - نقط انعطاف (C_f):

1. تعريف:

fالدالة قابلة للاشتقاق على مجال I. (C_f) منحنى f في معلم.

منحنى f محدب (convexe) على I إذا كان (C_f) يوجد فوق جميع مماساته على I. ونرمز له ب

منحنى f مقعر (concave) على I إذا كان (C_f) يوجد تحت جميع مماساته على I. ونرمز له ب



$M_0(x_0,y_0)$ نقطة من (C_f). (T) المماس ل (C_f) في M_0 . النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

- إذا كان : $\forall x\in I / f''(x)\geq 0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة).
- إذا كان : $\forall x\in I / f''(x)\leq 0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة).
- الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x0 من I و تتغير إشارتها بجوار x0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f) .

3. مثال: (أنظر ورقة الأنشطة المثال 2)

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقة الثانية " f هي بواسطة الجدول التالي:

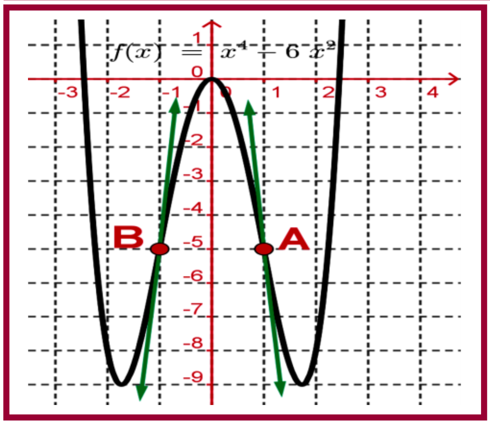
أعط تقعر (C_f) منحنى الدالة f

C) نقط انعطاف: POINTS D'INFLEXIONS

1. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم و $M_0(x_0,y_0)$ نقطة من (C_f). (T) المماس ل (C_f) في M_0 .

النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0



2. مثال: لنعتبر الدالة $f(x)=x^4-6x^2$

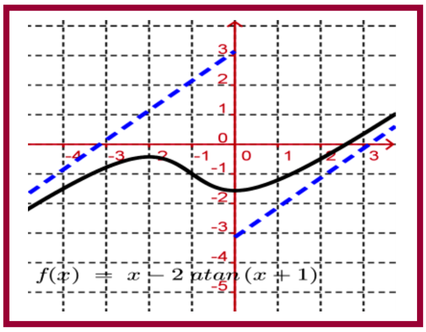
$A\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ نقطتي انعطاف ل (C_f)

3. خاصية:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I. x_0 من I.

الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

(أو للدالة f) .



4. مثال 1:

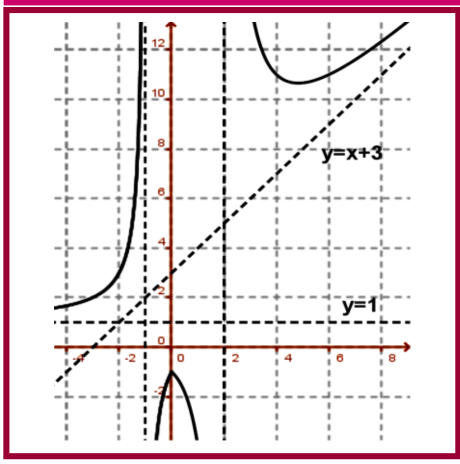
1. هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حددها ؟
2. أنشئ نقط انعطاف (C_f). إذا كان ممكن.

II. الفروع اللانهائية لمنحنى دالة f :

A) فرع اللانهائي :

1. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم. إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة M من (C_f) إلى ما لا نهاية فإن (C_f) يقبل فرع اللانهائي.



2. نشاط:

1) حدد الفروع اللانهائية ل (C_f).

2) أعط تعاريف لكل نوع من هذه الفروع اللانهائية.

B) مقارب أفقي -ASYMPTOTE HORIZONTALE

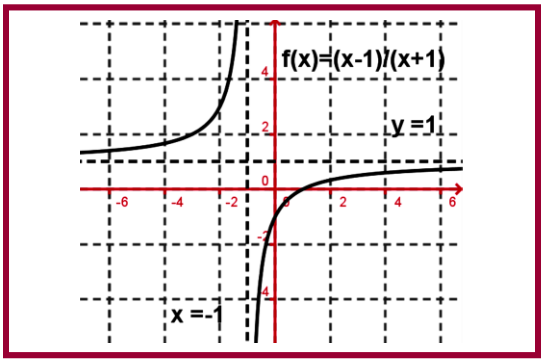
▪ تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ (أو $]-\infty,a[$).

إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ (أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$) فإن المستقيم ذي المعادلة y=b (أو y=c) مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).

2. مثال: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y=1$ مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$.



C) مقارب عمودي – ASYMPTOTE VERTICALE:

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة $D\setminus\{x_0\}$ (أي f غير معرفة في x_0)

إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ (أو $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$) فإن المستقيم ذي المعادلة $x=x_0$ مقارب عمودي ل (C_f) عند x_0 على اليمين (أو على اليسار).

2. مثال: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي ل (C_f) .

D) مقارب مائل –ASYMPTOTE OBLIQUE :

▪ تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ (أو $]-\infty,a[$). (C_f) منحنى دالة عددية f في معلم.

المستقيم ذي المعادلة $y=ax+b$ (أو $y=a'x+b'$) هو مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يعني:

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \left(\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases}\right)$$

▪ مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-1}$

بين أن: (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$. نحسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

خلاصة:

المستقيم ذي المعادلة $y=x-2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f) .

- **ملاحظات:**

❖ إذا كان $f(x)-(ax+b)\geq 0$ فإن (C_f) يكون فوق المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

❖ إذا كان $f(x)-(ax+b)\leq 0$ فإن (C_f) يكون تحت المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

❖ إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

- **تحديد : a b**

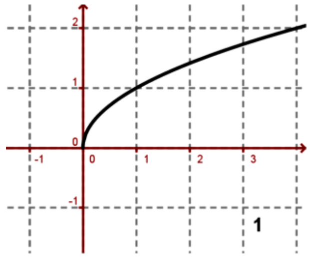
تحديد a و b مع الحالات الخاصة:

لتحديد a نحسب: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

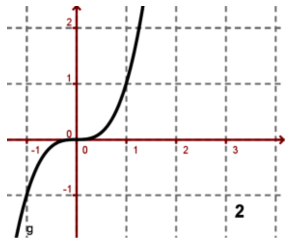
- إذا كان : $a=0$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل. (أنظر الرسم 1).
- إذا كان : $a=\infty$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب. (أنظر 7 الرسم 2)
- $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$) و $b=\infty$ في هذه الحالة نبحث عن b .

لتحديد b نحسب : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax=b$. بشرط $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$) .

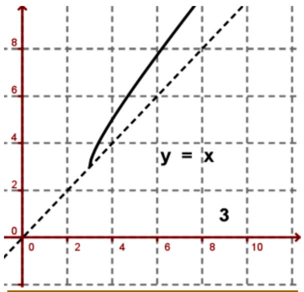
- $b=\infty$ هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞ .أو أيضا : (C_f) يقبل اتجاه مقاربي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞ . (أنظر الرسم 3)
- $b\in\mathbb{R}$ (حتى $b=0$) في هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$. (أنظر الرسم 4)



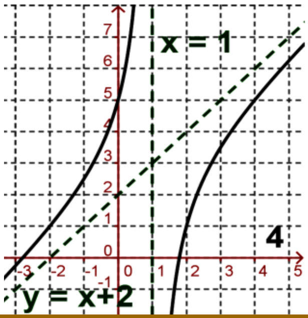
منحناها $f(x)=\sqrt{x}$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل



منحناها $f(x)=x^3$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب



$f(x)=x+\sqrt{x-3}$ منحناها يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم $D:y=x$



$f(x)=x+3-\frac{(x+2)}{(x-1)}$ منحناها يقبل مقارب مائل معادلته $D:y=x+2$

- **ملحوظة:**

إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)=c$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل الذي معادلته $y=ax+b+c$ بجوار ∞.

- **مثال:** $f(x)=x+3-\frac{(x+2)}{(x-1)}$.

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)-(x+3)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}-\frac{(x+2)}{(x-1)}=-1$ و منه المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مقار مائل ل (C_f) بجوار $\pm\infty$.

III. محور تماثل – مركز تماثل منحنى .

A) مركز تماثل منحنى :

- خاصية:

f دالة عددية معرفة D_f. (C_f) منحنها على D_f في معلم. $I(a,b)$ نقطة من المستوى (P).

النقطة $I(a,b)$ هي مركز تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \; ; \; f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$.

- مثال: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$. بين أن النقطة $I(-1;2)$ مركز تماثل ل (C_f) منحنى الدالة f .

B) محور تماثل ل (C_f):

- خاصية:

f دالة عددية معرفة D_f. (C_f) منحنها على D_f في معلم م.م . $D: x = a$ مستقيم من المستوى (P).

المستقيم الذي معادلته $D: x = a$ هو محور تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \; ; \; f(2a-x) = f(x) \end{cases}$.

- مثال: $f(x) = (x-1)^2 + 1$ حدد محور تماثل (C_f) بين أن المستقيم الذي معادلته $(D): x = 1$ محور تماثل ل (C_f) .

IV. مجموعة دراسة دالة عددية :

1. تعاريف:

f دالة عددية معرفة على $D_f = I \cup I'$ حيث I و I' متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.

- إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة على المجموعة $D_E = I$ أو $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.
  - أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.
  - ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.
- إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ يكفي دراسة على $D_E = D_f \cap J$ مع J مجال طوله T . $D_E = D_f \cap [a, a+T]$ مع $a \in \mathbb{R}$

2. مثال:

$f(x) = \sin(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$ ودورية ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $P = T$:

$D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi[= [0, 2\pi[$. أو $D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi] = [0, 2\pi]$.أو $D_E = \mathbb{R} \cap [-\pi, \pi[= [-\pi, \pi[$ أو ....

3. ملحوظة:

إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ و زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\dfrac{T}{2}$ أي $D_E = D_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ أو $D_E = \mathbb{R} \cap \left[-\dfrac{T}{4}, \dfrac{T}{4}\right[$.

4. مثال:

- مثال 1 : $f(x) = \sin(x)$ هي معرفة و دورية و فردية على $\mathbb{R}$ ودورها $T = 2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π .

خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.

- مثال 2 : $f(x)=\cos(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$. ودورية ودورها 2π و زوجية. ندرسها على مجال طوله π.

خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.

V. تصميم دراسة دالة عددية :

1	مجموعة تعريف الدالة f: D_f	8	دراسة إشارة f' على D_f أو D_E
2	دراسة زوجية f أو دورية f (إذا كان ذلك ممكن)	9	إعطاء جدول تغيرات f على D_f أو D_E
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_f	10	إذا كان ذلك ممكن دراسة تقعر أو نقط انعطاف f
4	نهايات f عند محدات D_f أو D_E	11	إنشاء 1) المعلم - 2) المقاربات - 3) بعض المماسات (حيث $f'(x)=0$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكن..)– 4) إنشاء (C_f)
5	استنتاج الفروع اللانهائية ل f	12	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مبيانيا المعادلة $x\in D_f\,/\,f(x)=g(x)$ أو $x\in D_f\,/\,f(x)=m$ أو المتراجحة $x\in D_f\,/\,f(x)\leq 0$..
6	دراسة الوضع النسبي للمنحنى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكن)	13	ثم دراسة الدالة $g(x)=\sqrt{f(x)}$ أو $g(x)=f(\lvert x\rvert)$
7	حساب الدالة المشتقة f' ل f على D_f أو D_E	14	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو ....

VI. مثال:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. وليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب النهايات عند محدات D_f.
3) حدد a ; b ; c من $\mathbb{R}$: $\forall x\in D_f;f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
4) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى (C_f).
5) أدرس الوضعية النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل .
6) أحسب $f'(x)$ لكل x من D_E.
7) أدرس إشارة f' على D_f ثم أعط جدول تغيرات f .
8) أدرس تقعر المنحنى (C_f) على D_f .
9) بين أن النقطة $I(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .