

دراسة الدوال

4 اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتبية قطعاً على مجال I و $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J = f(I)$ و

$$(\forall x \in J): (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5 الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

$(f+g)' = f' + g'$ (12)	$(a)' = 0$ (1)
$(af)' = af'$ (13)	$(x)' = 1$ (2)
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (14)	$(ax)' = a$ (3)
$(f^r)' = rf' \cdot f^{r-1}$ (15)	$(x^r)' = rx^{r-1}$ (4)
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$ (16)	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (5)
$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (17)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (6)
$(\sin x)' = \cos x$ (18)	$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ (7)
$(\cos x)' = -\sin x$ (19)	$(\sqrt[3]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{3(\sqrt[3]{u(x)})^2}$ (8)
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (20)	$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$ (9)
(21)	$(\text{Arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (10)
$(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$	(11)
(22)	$(\text{Arc tan}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$(\cos u(x))' = -u'(x)\sin(u(x))$	
$(\tan(u(x)))' = u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$ (23)	

ملاحظة:

- (a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
 الدالة $f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f - \{x/u(x)=0\}$
 (b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

I- الاشتقاق

1 تعاريف

(a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت

$$f'(x_0) = l \text{ ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

(b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان

$$f'_d(x_0) = l \text{ ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

(c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان

$$f'_g(x_0) = l \text{ ونكتب } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

(d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة

للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

2 التاويل الهندسي.

(a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يقبل مماساً (T) في النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه $f'(x_0)$ معادلته

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_d) على يمين $M(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته

$$(T_d): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

(d) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على

يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتيب وموجه نحو الأعلى على يمين $M(x_0, f(x_0))$.

(e) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على

يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتيب وموجه نحو الأسفل على يمين $M(x_0, f(x_0))$.

(f) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على

يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتيب وموجه نحو الأسفل على يسار $M(x_0, f(x_0))$.

(g) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على

يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتيب وموجه نحو الأعلى على يسار $M(x_0, f(x_0))$.

ملاحظة:

(* إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0, f(x_0))$ (لا ينكسر).

(* وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f ينكسر في النقطة $M(x_0, f(x_0))$ ويكون زاوية.

3 اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I و

$$(\forall x \in I) (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

⑥ رتابة دالة:

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
- (a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:
• $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- (b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:
• $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$
- (c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:
• $(\forall x \in I) f'(x) = 0$

⑦ مطارف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . يكون للدالة f مطرافا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تتقدم وتغير الإشارة في x_0 .

⑧ التفرع:

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .
- (a) يكون C_f محدبا "U" إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$
- (b) يكون C_f مقعرا "∩" إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$

⑨ نقطة انعطاف:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0 \in I$. تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f'' تتقدم وتغير الإشارة في x_0 .

ملاحظة:

- (a) إذا كانت f تتقدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل
- (b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التفرع نحسب $f''(x)$ ونذكر إشارتها.

II - التمثيل المبياني لدالة

① محور تماثل - مركز تماثل.

- (a) يكون المستقيم $\Delta: x=a$ محور تماثل المنبني C_f إذا وفقط إذا كان:
• لكل x من D_f $2a-x \in D_f$
• $(\forall x \in D_f): f(2a-x) = f(x)$
- (b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:
• لكل x من D_f $2a-x \in D$
• $(\forall x \in D_f): f(2a-x) = 2b - f(x)$

② الفروع اللانهائية.

(a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

(b) تصنيف الفروع اللانهائية

- (1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فإن المستقيم $\Delta: x=a$ مقارب ل C_f بجوار a .
- (2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن المستقيم $\Delta: y=b$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .
- (3) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

(a) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ فإن C_f يقبل فرعا شلجما اتجاهه محور الأرتيب بجوار ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(b) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإن C_f يقبل فرعا شلجما اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$$

(c) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

(i) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ فإن المستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$$

(ii) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ فإن C_f يقبل فرعا شلجما اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة:

يكون المستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقاربا ل C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $y = ax + b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$

③ بعض الملاحظات.

- (a) حلول المعادلة $f(x) = m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع المستقيم $\Delta: y = m$.
- (b) حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.
- (c) حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g .
- (d) حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g .
- (e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $\Delta: y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة $f(x) - y$
- (*) إذا كان $f(x) - y \geq 0$ فإن C_f يوجد فوق Δ .
- (*) إذا كان $f(x) - y \leq 0$ فإن C_f يوجد تحت Δ .