

ملخص وقواعد في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصلي: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ملخص درس نهاية متتالية

• الجمع و الضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

• المقلوب و الخارج:

$\lim u_n$	l	$l < 0$	$l > 0$	$-\infty$	$l < 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l < 0$	$-\infty$	∞	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	ش غ م	ش غ م

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

ملاحظة:

- نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

أمثلة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty$

لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times n = +\infty$$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$$

نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n = +\infty$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

❖ نهاية بعض المتتاليات المرجعية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

أمثلة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 = 0 - 7 = -7$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 = 0 + 3 = 3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 = 0 + 5 = 5$$

ملاحظات:

• كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة

• كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

❖ **خاصية:** ليكن a عددا حقيقيا

✓ إذا كان: $a > 1$ فان: (a^n) تؤول إلى $+\infty$

✓ إذا كان: $a = 1$ فان: (a^n) تؤول إلى 1

✓ إذا كان: $-1 < a < 1$ فان: (a^n) تؤول إلى 0

✓ إذا كان: $a \leq -1$ فان: المتتالية (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ لأن: $a = 2 > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ لأن: } -1 < a = \frac{2}{3} < 1$$

$(-5)^n$ لأن: ليست لها نهاية لأن: $a = -5 < -1$

❖ العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا

حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

• الجمع و الضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م