



الصفحة

1  
4

الامتحان الوطنى الموحد للبكالوريا  
الدورة العادلة 2010  
الموضوع

9	المعامل:	NS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك :

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(25.6ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(75.3ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط) الجزء I و II مستقلان فيما بينهما.- I نزود المجموعة  $I = [0, +\infty]$  بقانون التركيب الداخلي \* المعرف بما يلي:

$$(\forall (a,b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

1) بين أن القانون \* تبادلي و تجميلي في  $I$ . 0.52) بين أن القانون \* يقبل عنصراً محايداً في  $I$  يتم تحديده. 0.253) أ- بين أن  $(I \setminus \{1\}, *)$  زمرة تبادلية. ( $\{1\}$  هي المجموعة  $I$  محرومة من 1) 0.75ب- بين أن  $[1, +\infty]$  زمرة جزئية للزمرة  $(I \setminus \{1\}, *)$ . 0.254) نزود  $I$  بقانون التركيب الداخلي  $\times$  ( $\times$  هو الضرب في  $\mathbb{R}$ )أ- بين أن القانون \* توزيعي بالنسبة لقانون  $\times$  0.25ب- بين أن  $(I, \times, *)$  جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{- II نعتبر المصفوفة :}$$

1) أحسب  $A^2$  و  $A^3$ . 0.52) استنتج أن المصفوفة  $A$  لا تقبل مقلوباً. 0.5التمرين الثاني : (3.5 نقط)المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعمد منظم و مباشر .  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي :  $3 + 4i$  0.25ب- حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(E): 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$  0.52) ليكن  $a$  و  $b$  حل المعادلة  $(E)$  حيث:  $\operatorname{Re}(a) < 0$  والنقطتين  $A$  و  $B$  صوري  $a$  و  $b$  على التوالي.

$$\frac{b}{a} = 1 - i \quad \text{أ- تحقق أن:}$$

ب- استنتاج أن المثلث  $AOB$  متساوي الساقين و قائم الزاوية في  $A$ . 0.753) لتكن  $C$  نقطة لحقها  $c$  و تختلف النقطة  $A$  ولتكن  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $C$ 

$$\text{وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ ولتكن } L \text{ صورة النقطة } D \text{ بالإزاحة التي متوجهتها } \overrightarrow{AO} .$$

أ- حدد بدلالة  $c$  العدد العقدي  $d$  لحق النقطة  $D$ . 0.5ب- حدد بدلالة  $c$  العدد العقدي  $\ell$  لحق النقطة  $L$ . 0.5ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي  $\frac{\ell - c}{a - c}$  ثم استنتاج طبيعة المثلث  $ACL$ . 0.75

التمرين الثالث: (3 نقط)

- 1 (1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية  $m$  بحيث:  $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$
- (2) ليكن  $p$  عدداً أولياً بحيث:  $p = 3 + 4k$  مع  $k$  عدد صحيح طبيعي.
- و ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً بحيث:  $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- أ- تحقق أن:  $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$  0.25
- ب- بين أن  $n$  و  $p$  أوليان فيما بينهما. 0.5
- ج- استنتج أن:  $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$  0.75
- د- استنتاج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي  $n$  يحقق:  $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  0.5

التمرين الرابع: (6.25 نقط)

- I- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty]$  بما يلي:
- و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد منظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- (1) أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  0.5
- (2) أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty]$  ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى  $(C)$  في أصل المعلم ثم أنشئ  $(C)$ . 0.75
- (نأخذ  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$ )
- (4) أحسب التكامل  $a = \int_0^1 f(x) dx$  ثم استنتاج بالستنتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى  $x=1$  ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته  $(C)$  0.5

II- ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر من أو يساوي 2.

- نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty]$  بما يلي:
- (1) أ- بين أن:  $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$  0.25
- ب- استنتاج نهاية الدالة  $f_n$  عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$ . 0.25
- (2) ادرس تغيرات الدالة  $f_n$  على المجال  $[0; +\infty]$  ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $u_n$  من المجال  $[0, 1]$  بحيث:  $f_n(u_n) = 1$  0.5
- (4) أ- تحقق أن:  $(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) = u_n$  0.25
- ب- بين أن المتالية  $(u_n)_{n \geq 2}$  تزايدية قطعاً ثم استنتاج أنها متقاربة. 0.75

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n : \quad (5) \text{ نضع :}$$

أ- بين أن :  $0 < \ell \leq 1$

0.25

$$(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n} \quad : \quad (6)$$

ج- استنتج أن :  $\ell = 1$

0.5

### التمرين الخامس: (3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $[0, +\infty)$  بما يلي :

(1) بين أن الدالة  $F$  فردية .

0.25

$$(2) \text{ لكل } x \text{ من المجال } [0, +\infty) \text{ نضع :} \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

أ- تحقق أن:  $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0.25

ب- بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty)$  ثم أحسب  $F'(x)$  من أجل  $x > 0$

0.5

ج- استنتاج منحى تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $[0, +\infty)$ .

0.5

$$(3) \text{ أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المئوية ، بين أن: } (\forall x > 0) \left( \exists c \in ]x, 2x[ \right) : \quad F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

$$\text{ب- استنتاج أن: } (\forall x > 0) : \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

ج- حدد النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

0.75

$$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2} \text{ و } F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$$

0.75

د- تحقق أن : ثم استنتاج أن المعادلة  $F(x) = x$  تقبل حالاً وحيداً في  $[0, +\infty)$