



الأمتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

٢٠١٦ | ٤٥٣ | ٥٣٥ | ٣٥٧ | ٣٥٨ | ٣٥٩



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
وامتحانات والتوجيه

NS 24

الرياضيات

المادة

مدة الإلزاز

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

الشعبة أو المسلك

4

9

المعامل

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

$$E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2, M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}\}$$

لكل $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ ، نضع:

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

0.5
0.5

- تحقق أن:

$$((x, y), (x', y')) \in E \Rightarrow M(x, y) \circ M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع E^* ونعتبر التطبيق: $E^* = E - \{M(0,0)\}$ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

من E ، حيث الزوج $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

0.25
0.25

أ) بين أن j تشكل من $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ نحو (E^*, \circ)

ب) استنتاج أن (E^*, \circ) زمرة تبادلية وأن عنصرها المحايد هو $(0, 1, 0)$

0.75

4- بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادل.

0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5- نضع

0.5

أ) أحسب $A' M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E

0.5

ب) استنتاج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{Z}^* بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$$

0.25

1- بين أن: $[173] = 3 \times [57]$ (لاحظ أن: $a^{171} \equiv -b^{171} \pmod{173}$)

0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b

0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a+b$

0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

0.25

أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $[a^{172}] \equiv [b^{172}] \pmod{[173]}$

0.5

ب) بين أن: $[a^{171}(a+b)] \equiv 0 \pmod{[173]}$

0.5

ج) استنتاج أن 173 يقسم $a+b$

0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{Z}^* المعادلة التالية:$

ليكن (x, y) عنصرا من \mathbb{R}^2 حل للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$1- \text{تحقق أن: } k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1 \quad 0.25$$

$$2- \text{بين أن: } k = 1 \text{ ثم حل المعادلة } (E) \quad 0.5$$

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعمد و منظم و موجه . (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى و غير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة:

$$z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

$$1- أ) \text{ بين أن: } \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1 \quad 0.5$$

ب) استنتج أن النقطة M تنتهي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2

2- بين أنه إذا كانت $\bar{z}_1 = z_2$ فإن M تنتهي إلى المحور الحقيقي.

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مرکزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $[0, \pi]$
(أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α

ب) استنتاج أن النقطة M تنتهي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $[0, \pi]$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حللا المعادلة:

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$$

$$أ) \text{ بدون حساب } z_1 \text{ و } z_2 \text{ تتحقق أن: } z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$$

ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ .

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي

$$e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad \theta \text{ محصور بين } 0 \text{ و } x \text{ بحيث:}$$

2- استنتاج أن:

$$(أ) \quad (" x > 0) ; \quad 1 - x < e^{-x}$$

$$(ب) \quad (" x > 0) ; \quad x + 1 < e^x$$

$$(ج) \quad (\forall x > 0) ; \quad 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x \quad 0.25$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي: إذا كان $x > 0$ $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ و $f(0) = 1$

ولتكن (C) المنحنى الممثّل للدالة f في المستوى المرتّب إلى معلم متعمّد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن: $("x^3 > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} f - e^{-x} + 1$ (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-أ) من الجزء الأول) 0.25

ب) استنتج أن: $("x^3 > 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} f - e^{-x} + x - 1 f \frac{x^2}{2}$ 0.5

3- أ) تحقّق أن: $("x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$ 0.5

ب) استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها. 0.75

4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتراق على المجال $[0, +\infty]$ وأن $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ 0.75

ب) استنتاج أن الدالة f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty]$. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ب) من الجزء الأول) 0.5

الجزء الثالث:

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$ 0.5

2- بين أن المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تنقصصية قطعاً ثم استنتاج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتائج السؤال 2-ج) من الجزء الأول) 0.5

3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ 0.5

التمرين الخامس: (3 نقاط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I = [0, +\infty]$ بما يلي: $I = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتراق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I . 0.5

ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعاً على المجال I 0.25

2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ 0.5

3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده. 0.25

ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للقابل F . 0.5

انتهى