المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2016

- الموضوع -

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل .....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

لدينا صندوقان U و V. الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء؛
الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : إذا كانت حمراء، نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V ؛ و إذا كانت زرقاء، نضعها جانبا؛ ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V .

لتكن الأحداث التالية: R_U : "الكرة المسحوبة من الصندوق U حمراء"؛

B_U : "الكرة المسحوبة من الصندوق U زرقاء"؛

R_V : "الكرة المسحوبة من الصندوق V حمراء"؛

B_V : "الكرة المسحوبة من الصندوق V زرقاء"؛

0.5 | 1- أحسب احتمال كل من الحدثين R_U و B_U .

0.5 | 2- أ) أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث R_U محقق.

0.5 | ب) أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث B_U محقق.

1 | 3- بين أن احتمال الحدث B_V هو : $\frac{13}{21}$

0.5 | 4- استنتج احتمال الحدث R_V .

التمرين الثاني:(3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، نضع : $M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E=\{M(z)/z\in\mathbb{C}\}$

1- نزود المجموعة E بقانون تركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\forall z'\in\mathbb{C})\ :\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

1 | بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

2- نعتبر التطبيق : $f:\mathbb{C}^*\to E$ الذي يربط كل عدد عقدي z من $\mathbb{C}^*$ بالمصفوفة $M(z)$

1 | أ) بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

0.5 | ب) استنتج أن $(E-\{M(0)\},\times)$ زمرة تبادلية.

1 | 3- بين أن $(E,*,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث:(3.5 نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$(E):\ z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)z+4i=0$$

0.5 | 1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=\left(\sqrt{3}-1\right)(1-i)^2$

1 | ب) أكتب على الشكل المثلثي كل حل من حلي المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقطتين A و B التي لحقيهما على التوالي $a=1+i\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}+i$

0.75 | أ) بين أن (D) مجموعة النقط من المستوى العقدي التي لحقها z يحقق : $z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ هي مستقيم يمر من النقطة B

ب) لتكن M و M' نقطتان لحقاهما على التوالي z و z' بحيث: $z'=a\bar{z}-b$ و $z\neq b$

0.5 | بين أن : $\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\frac{2}{|z-b|^2}$

0.75 | ج) استنتج أن المستقيم (D) هو منصف الزاوية $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

التمرين الرابع : (6.5 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\ln(x)-\frac{n}{x}$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0.75 | 1- أ) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n)

0.75 | ب) أدرس تغيرات الدالة f_n على $]0,+\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها.

0.5 | ج) أنشئ (C_2)

0.5 | 2- بين أن الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$

0.5 | 3- أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,+\infty[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$

0.5 | ب) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

0.5 | ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا.

0.5 | 4- أ) بين أن: $\ln(x)<x\ ;\ (\forall x>0)$

0.5 | ب) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

5- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx$

0.5 أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}])\ :\ I_n = f_n(c_n)$

0.5 ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \le I_n \le \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

0.5 ج) حدد: $\lim_{n \to +\infty} I_n$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة العددية g_n ذات المجهول x المعرفة على المجال $[n,+\infty[$ بما يلي: $g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t}\,dt$

0.5 1- أ) بين أن الدالة g_n قابلة للاشتقاق على المجال $[n,+\infty[$ ثم حدد دالتها المشتقة الأولى g'_n

0.25 ب) بين أن الدالة g_n تزايدية قطعا على المجال $[n,+\infty[$

0.5 2- أ) بين أن: $(\forall x \ge n)\ ;\ g_n(x) \ge \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(يمكنك استعمال المتفاوتة التالية: $(\forall t \ge 0)\ ;\ \ln(1+t) \le t$)

0.25 ب) استنتج أن: $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

0.25 3- أ) بين أن الدالة g_n تقابل من المجال $[n,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$

0.5 ب) استنتج أن: $(\forall n \ge 2)\ (\exists!\, u_n \ge n)\ :\ \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 2}$ المعرفة في السؤال 3- ب)

0.5 أ) بين أن: $(\forall n \ge 2)\ ;\ \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

0.5 ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 2}$ تزايدية قطعا.

0.25 ج) حدد $\lim_{n \to +\infty} u_n$

انتهى