

الثانية علوم رياضية

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\times, +, \mathbb{R})$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي . و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$ ، \mathbb{R}^2 من (a,b) وكل $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ نضع

نعتبر المجموعة $E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$

- نعرف على $M_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي :

$(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4) \quad M(a,b)TM(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$

تحقق أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), T)$

3- ليكن φ التطبيق من \mathbb{C}^* نحو E الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (حيث :

بالمصفوفة $M(a,b)$ من E

أ) تحقق من أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, T) وأن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ حيث :

ب) استنتج أن (E^*, T) زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J

4- أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E

ب) استنتاج أن $(E, +, T)$ جسم تبادلي

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول :

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $(E) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

<p>- تتحقق أن ممierz العادلة (E) هو $\Delta = (2im)^2$: 0,5</p> <p>- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E) 0,5</p> <p><u>الجزء الثاني:</u> المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$</p> <p>نفرض أن $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$ و $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ و $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ و نضع :</p> <p>نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2</p> <p>- أ) تتحقق أن $z_1 = iz_2 + 1$ 0,25</p> <p>ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مرکزه النقطة Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ 0,5</p> <p>- أ) تتحقق من أن $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$ 0,5</p> <p>ب) بين أنه إذا كانت النقط M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تتبع إلى الدائرة (Γ) التي أحد قطراتها $[AB]$ 0,5</p> <p>ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M_1 و M_2 متداورة . (لاحظ أن $i = \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega}$) 0,75</p>	
--	--

التمرين الثالث : (3 ن)

<p>نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016 = 2^5 3^2 7$ ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5</p> <p>- ليكن الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث : $px + y^{p-1} = 2017$</p> <p>أ) تتحقق أن $p < 2017$ 0,25</p> <p>ب) بين أن : y لا يقسم p 0,5</p> <p>ج) بين أن $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ثم استنتج أن p يقسم 2016 0,75</p> <p>د) بين أن $p = 7$ 0,5</p> <p>- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تتحقق : $px + y^{p-1} = 2017$ 1</p>	
--	--

التمرين الرابع : (10 ن)

<p><u>الجزء الأول:</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty)$ بما يلي :</p> $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{و} \quad f(0) = 0$ <p>ليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعمد منظم (نأخذ O, \vec{i}, \vec{j})</p> <p>- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0,25</p> <p>ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتغال على اليمين في 0 0,5</p>	
--	--

ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ثم أحسب (f') لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,5
-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانا النتيجة المحصل عليها .	0,5
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f	0,25
-أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها .	0,75
ب) أرسم المنحنى (C) . ($4e^{-3} \simeq 0,2$) $f(1) \simeq 0,7$ و $f(1) \simeq 0,2$	0,5
<u>الجزء الثاني :</u> نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :	
- بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0, +\infty[$	0,25
-أ) باستعمال طريقة المتكاملة بالأجزاء بين أن :	0,5
$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-t} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$	
ب) حدد $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,25
ج) بين أن : $\int_0^1 f(x) dx = e^{-1}$	0,5
-أحسب بالستيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات :	0,5
$y = 0$ و $x = 2$ و $x = 0$	
- نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :	
أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n, n+2[$	0,5
$u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$ بحيث :	
$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$:	0,25
ج) استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0,25
<u>الجزء الثالث :</u>	
-أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً واحد a_n بحيث :	0,5
ب) بين أن المتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية	0,25
ج) تحقق أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$	0,25
-أ) بين أن : $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$	0,25
ب) بين أن : $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$	0,5

<p>- ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر من أو يساوي 4</p> <p>($e^{\frac{3}{4}} \geq 1$ ثم استنتج أن $a_n \geq 1$ (نقبل أن $a_4 \geq 1$)</p> <p>ب) بين أن $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث</p> <p>ج) بين أن $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب)) ثم استنتاج</p> <p>د) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---