الثانية علوم رياضية

الوطني الاستدراكي 2017

التمرين 1 : 4,5 **ن**

نذكر أن $\mathbb{C},+,\times$ جسم تبادلي و أن $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\cdot$ فضاء متجهي حقيقي و أن $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\times$ حلقة واحدية غير تبادلية و غير كاملة .

نضع : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ و $M\ x,y=\begin{pmatrix}x & -3y\\ y & x\end{pmatrix}$ لكل x,y من $\mathbb{R}^2$

و $E=\ \mathrm{M}\ x,y\ /\ x,y\in\mathbb{R}^2$

1. بين أن E فضاء متجهي جزئي من $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\cdot$ بعده 2 — 0,75
2. أ) بين أن E جزء مستقر من $M_2\ \mathbb{R}\ ,\times$ — 0,5

   ب) بين أن $E,+,\times$ حلقة واحدية و تبادلية — 0,75
3. نضع $E^*=E\setminus\ M\ 0,0$ و نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعرف بما يلي :

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^2\quad \varphi\ x+iy\ =M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

   أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}^*,\times$ نحو $E^*,\times$ — 0,75

   ب) استنتج أن $E^*,\times$ زمرة تبادلية . — 0,5

   ج) بين أن : $J^{2017}=\varphi\ 3^{1008}\sqrt{3}i$ ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في $E^*,\times$ — 0,75
4. بين أن $E,+,\times$ جسم تبادلي. — 0,5

التمرين 2 : 3 **ن**

يحتوي كيس على $2n$ كرة (n من $\mathbb{N}^*$) ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء. جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك .

قانون اللعبة هو كما يلي :

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض ، نربح 20 نقطة
- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود ، نخسر 20 نقطة
- إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ، يكون الربح منعدم .

1. أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم — 0,75
2. نعيد اللعبة السابقة خمس مرات

   أ) أحسب احتمال ربح 100 نقطة — 0,5

   ب) أحسب احتمال ربح 40 نقطة — 1
3. خلال لعبة واحدة ، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و 0 عندما يكون

الربح منعدما و $+20$ عند الربح	
أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,25

التمرين 3 : 2,5 **ن**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $O,\vec{e}_1,\vec{e}_2$	
لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$	
1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين .	0,5
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1	
بين أن : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$	0,5
3. ليكن Δ واسط القطعة AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Δ فإن M' تنتمي إلى Δ	0,75
4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Γ فإن M' تنتمي إلى المستقيم AB	0,75

التمرين 4 : 10 **ن**

<u>الجزء الأول</u> :	
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=0,+\infty$ بما يلي :	
$f\ 0=1$ و $\forall x\in 0,+\infty \quad f\ x=\frac{Arc\tan\ x}{x}$	
1. بين أن f متصلة على المجال I	0,5
2. أ) ليكن x من I بين أن : $\forall t\in 0,x \quad \frac{1}{1+x^2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$	0,5
ب) بين أن : $\forall x\in 0,+\infty \quad \frac{x}{1+x^2}\leq Arc\tan\ x\leq x$	0,5
ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75
3. أ) علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $0,+\infty$ ، أحسب $f'\ x$ لكل x من $0,+\infty$	0,5
ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I	0,25

<u>الجزء الثاني</u> :	
لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I=0,+\infty$ بما يلي :	
$g\ 0=1$ و $\forall x\in 0,+\infty \quad g\ x=\frac{1}{x}\int_0^x f\ t\ dt$	
1. أ) بين أن : $\forall x\in 0,+\infty \quad f\ x\leq g\ x\leq 1$	0,5
ب) بين g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75

2. بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0,+\infty$ و أن $\forall x\in 0,+\infty \quad g' x =\frac{1}{x} f x -g x$	0,75
3. بين أن الدالة g تناقصية على المجال I	0,25
4. أ) بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f t dt=0$ (لاحظ أن : $\forall x\in 0,+\infty \quad 0<Arc\tan x<\frac{\pi}{2}$)	0,75
ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g x$	0,5

<u>الجزء الثالث</u> :	
1. بين أن المعادلة $g x = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$	0,75
2. أ) تحقق أن : $\forall x\in 0,+\infty \quad 0\le 1-f x \le\frac{x^2}{1+x^2}$ (يمكن استعمال السؤال 2. ب) الجزء الأول)	0,5
ب) بين أن $\forall x\in 0,+\infty \quad \lvert g' x\rvert\le\frac{1}{2}$	0,75
3. لتكن $u_n{}_{n\ge0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0\in\mathbb{R}^+$ و $u_{n+1}=g u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\le\frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$	0,75
ب) بين أن المتتالية $u_n{}_{n\ge0}$ متقاربة	0,75