تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا : $E \subset M_2\ \mathbb{R}$

و $E \neq \varnothing$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ لأن $I = M\ 1,0$)

لتكن $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E و ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M\ a,b + \beta M\ x,y &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\ \alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M\ \alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\cdot$

✓

- لتكن $M\ x,y$ من E

$$\begin{aligned} M\ x,y &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة مولدة للفضاء E

- ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O \ &\Rightarrow\ M\ \alpha,\beta = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي I,J أساس للفضاء E

و منه $\dim E = card\ I,J = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $M_2\ \mathbb{R}\ ,\times$

لدينا : $E \neq \varnothing$ و $E \subset M_2\ \mathbb{R}$

لتكن $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E

$$\begin{aligned} M\ a,b \times M\ x,y &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3\ ay+bx \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M\ ax-3by, ay+bx \in E \end{aligned}$$

$ax-3by, ay+bx \in \mathbb{R}^2$

إذن E جزء مستقر من $M_2\ \mathbb{R}\ ,\times$

ب) لنبين أن $E,+,\times$ حلقة واحدية و تبادلية

❖

✓ $E,+$ زمرة تبادلية (لأن $E,+,\cdot$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $M_2\ \mathbb{R}\ ,\times$ و $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2\ \mathbb{R}$

فإن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $E,+,\times$ حلقة

❖

✓ $I = M\ 1,0$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $E,+,\times$ حلقة واحدية

❖

✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E

لدينا : $M\ a,b \times M\ x,y = M\ ax-3by, ay+bx$

و : $M\ x,y \times M\ a,b = M\ xa-3yb, xb+ya$

إذن لكل $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E : $M\ a,b \times M\ x,y = M\ x,y \times M\ a,b$

و بالتالي : $E,+,\times$ حلقة واحدية و تبادلية

3. أ)

❖ ليكن a,b و x,y من $\mathbb{R}^2$

✓ $\varphi\ a+ib \times x+iy = \varphi\ ax-by + i\ ay+bx = M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)$

$$\varphi\ a+ib \times \varphi\ x+iy = M\left(a, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \times M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

✓ $$= M\left(ax-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{\sqrt{3}}, a\times\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times x\right)$$

$$= M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)$$

إذن φ تشاكل من $\mathbb{C}^*,\times$ نحو $E^*,\times$

❖ ليكن $M\ a,b$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi\ x+iy = M\ a,b$

$$\varphi\ x+iy = M\ a,b \Leftrightarrow M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M\ a,b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

إذن لكل $M\ a,b$ من E^* يوجد زوج وحيد $x,y = a,b\sqrt{3}$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$\varphi\ x+iy = M\ a,b$

و منه φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}^*,\times$ نحو $E^*,\times$

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}^*,\times$ نحو $E^*,\times$ و $\mathbb{C}^*,\times$ زمرة تبادلية فإن $E^*,\times$ زمرة تبادلية

ج)

✓

$$\begin{aligned}
J^{2017} &= M\ 0,1\ ^{2017} \\
&= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\
&= \varphi\ 0+i\sqrt{3}\ ^{2017} \\
&= \varphi\ \ i\sqrt{3}\ ^{2017} \\
&= \varphi\ \sqrt{3}^{2017}\times i \\
&= \varphi\ \sqrt{3}^{2016}\sqrt{3}\times i \\
&= \varphi\ 3^{1008}\sqrt{3}\times i
\end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}
J^{2017}\ ^{-1} &= \varphi\ 3^{1008}\sqrt{3}\times i\ ^{-1} \\
&= \varphi\ \ 3^{1008}\sqrt{3}\times i\ ^{-1} \\
&= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\times i}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\
&= \varphi\left(\ 0\ +i\left(\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= M\left(0,\frac{-\sqrt{3}}{3^{1008}\times\sqrt{3}}\right) \\
&= M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}}\right)
\end{aligned}$$

.4

✓ لدينا $E,+,\times$ حلقة واحدية و تبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M\ \ x,y$ من E^* يقبل مقلوبا

ليكن $M\ \ x,y$ من E بحيث : $M\ \ x,y \neq M\ \ 0,0$

لدينا $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$

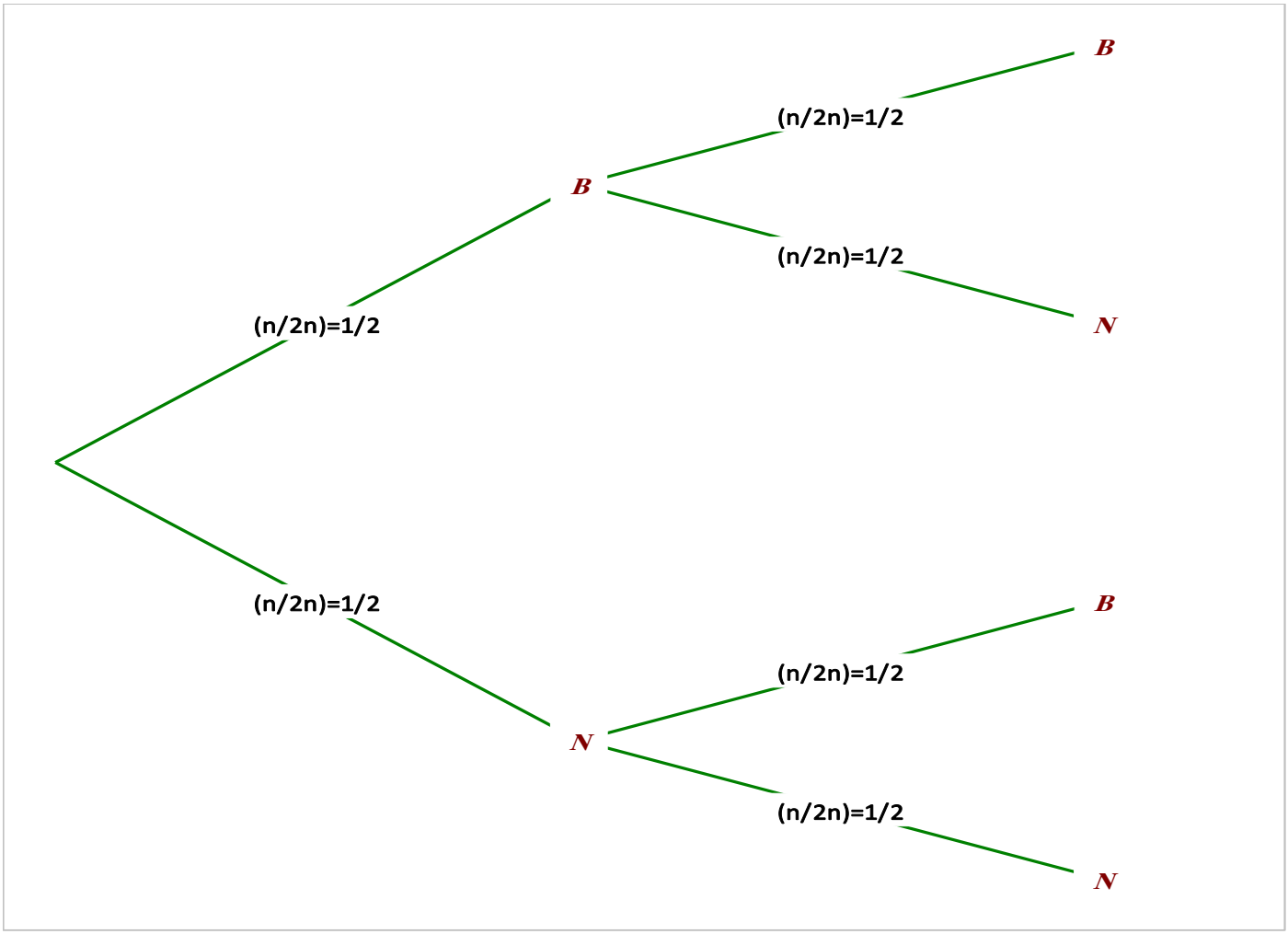
$$\text{dét}M(x,y)=\begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+3y^2$$

إذن $\text{dét}M(x,y)\neq 0$ (لأن $(x,y)\neq(0,0)$)

$$M(x,y)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+3y^2} & \dfrac{3y}{x^2+3y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+3y^2} & \dfrac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix}=M\left(\frac{x}{x^2+3y^2},\frac{-y}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p\ E\ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p\ F\ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p\ G\ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5\ \ p\ E\ \ ^5\ 1-p\ E\ \ ^{5-5}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2\ \ p\ E\ \ ^2\ 1-p\ E\ \ ^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$$

3. أ) $p\ X=-20\ = p\ F\ = \frac{1}{4}$

$$p\ X=0\ = p\ G\ = \frac{1}{2}$$

$$p\ X=20\ = p\ E\ = \frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p\ X=x_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E\ X\ = \left(-20\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(20\times\frac{1}{4}\right)=0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن $z \in \mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z' = z$

تكافئ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=z$

تكافئ $z=\frac{1}{z}$

تكافئ $z^2=1$

تكافئ $z=1$ أو $z=-1$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - -1,1$

$$\begin{aligned}
\frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} \\
&= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} \\
&= \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} \\
&= \frac{z+1\ ^2}{z-1\ ^2} \\
&= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2
\end{aligned}$$

إذن $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ لكل z من $\mathbb{C}^* - -1,1$

3. ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

إذن $AM = BM$

إذن $\frac{BM}{AM}=1$ $\qquad M \neq A$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

لدينا : $\frac{BM'}{AM'}=\frac{|z'+1|}{|z'-1|}=\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|=\left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left(\frac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2=\left(\frac{BM}{AM}\right)^2=1^2=1$

إذن $AM'=BM'$

و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

إذن $\overline{\overline{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}}\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$ $\quad(\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM})$

إذن $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\begin{aligned}\left(\overline{\overline{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)2\pi\\ &\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right)2\pi\\ &\equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)2\pi\\ &\equiv \pi\ 2\pi\end{aligned}$$

لأن : $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$

إذن A و B و M' نقط مستقيمية و منه M' تنتمي إلى AB

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=0,+\infty$ بما يلي :

$$f\ 0=1 \quad \text{و} \quad \forall x\in 0,+\infty \quad f\ x=\frac{Arc\tan\ x}{x}$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

لدينا $f\ 0=1$

و $\lim\limits_{x\to0^+}f\ x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{Arc\tan\ x}{x}=1$

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+}f\ x=f\ 0$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1 : x \mapsto Arc\tan\ x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

$f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

و $\forall x \in 0,+\infty \quad f_2\ x \neq 0$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $0,+\infty$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أ) ليكن $x \in I = 0,+\infty$ و ليكن $t \in 0,x$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

إذن : $0 \leq t^2 \leq x^2$

إذن : $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

و منه : $\forall t \in 0,x \quad \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

ب) لدينا : $\forall t \in 0,x \quad \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

إذن : $\int_0^x \dfrac{1}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\left[\dfrac{t}{1+x^2}\right]_0^x \leq Arc\tan t\ {}_0^x \leq t\ {}_0^x$

و منه : $\forall x \in 0,+\infty \quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f\ x - f\ 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x}$

لدينا : $\forall x \in 0,+\infty \quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} \leq 1$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad \dfrac{1}{1+x^2} - 1 \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} - 1 \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad \dfrac{-x}{1+x^2} \leq \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} \leq 0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} = 0$

و منه : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f\ x-f\ 0}{x-0}=0$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f'_d\ 0=0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

ليكن $x\in 0,+\infty$: لدينا

$$f'\ x = \left(\frac{Arc\tan x}{x}\right)'$$

$$= \frac{Arc\tan'\ x\times x-Arc\tan\ x\times x'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn\ x}{x^2}$$

إذن : $\forall x\ 0,+\infty \quad f'\ x=\frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn\ x}{x^2}$

ب) لدينا : $\forall x\ 0,+\infty \quad f'\ x=\frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn\ x}{x^2}$

و لدينا : $\forall x\ 0,+\infty \quad x^2>0$

إذن إشارة $f'\ x$ هي إشارة : $\frac{x}{1+x^2}-Arcatn\ x$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\frac{x}{1+x^2}-Arcatn\ x\le 0$

إذن : $f'\ x\le 0$

و منه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t\in 0,+\infty$ و $x\in 0,+\infty$

لدينا : $\frac{t}{1+t^2}\le Arc\tan t\le t$

إذن : $\frac{1}{1+t^2}\le\frac{Arc\tan t}{t}\le 1$

إذن: $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\le\int_0^x\frac{Arc\tan t}{t}dt\le\int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x\le\int_0^x f\ t\ dt\le x$

إذن : $\frac{Arc\tan x}{x} \leq \frac{1}{x}\int_0^x f\ t\ dt \leq 1$

و منه : $\forall x \in 0,+\infty \quad \frac{Arc\tan x}{x} \leq g\ x\ \leq 1$

ب) لدينا : $\forall x \in 0,+\infty \quad f\ x\ \leq g\ x\ \leq 1$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad f\ x\ -1 \leq g\ x\ -1 \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad \frac{f\ x\ -1}{x} \leq \frac{g\ x\ -1}{x} \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad \frac{f\ x\ -f\ 0}{x-0} \leq \frac{g\ x\ -g\ 0}{x-0} \leq 0$

لدينا f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $\lim_{x\to 0^+}\frac{f\ x\ -f\ 0}{x-0} = 0$

إذن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{g\ x\ -g\ 0}{x-0} = 0$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d\ 0\ = 0$

2. أ) ليكن $x \in 0,+\infty$

$t \mapsto f\ t$ متصلة على $0,x$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$

إذن الدالة $x \mapsto \int_0^x f\ t\ dt$ قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$

و لدينا : $x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$

و منه g قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

$$\begin{aligned} g'\ x &= \left(\frac{1}{x}\int_0^x f\ t\ dt\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f\ t\ dt + \frac{1}{x}\left(\int_0^x f\ t\ dt\right)' \\ &= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f\ t\ dt + \frac{1}{x} f\ x \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\int_0^x f\ t\ dt + f\ x\right) \\ &= \frac{1}{x}\ f\ x\ - g\ x \end{aligned}$$

و منه : $\forall x \in 0,+\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$

3. لدينا : $x > 0$ و لدينا : $f(x) - g(x) \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0,+\infty \quad g'(x) \leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x > 1$ و ليكن $1 \leq t \leq x$

لدينا : $0 < Arc\tan t < \frac{\pi}{2}$

إذن : $0 < \frac{Arc\tan t}{t} < \frac{\pi}{2t}$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{Arc\tan t}{t} dt < \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{Arc\tan t}{t} dt < \frac{\pi}{2} \ln t \,{}_1^x$

إذن : $0 < \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt < \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt = 0$

ب) لدينا : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\, dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt$

ليكن $t \in 0,1$

لدينا : $0 \leq t \leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1) \leq f(t) \leq f(0)$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t)\, dt \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\, dt \leq \frac{1}{x}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\, dt = 0$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f\ t\ dt=0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} g\ x\ =0$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g\ x\ =x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$

نعتبر الدالة : $h:x\mapsto g\ x\ -x$

✓ h متصلة على $0,1$

✓ h قابلة للاشتقاق على $0,1$ و لدينا : $h'\ x\ =g'\ x\ -1<0$ (لأن $g'\ x\ \leq 0$)

إذن h تناقصية قطعا على $0,1$

✓ ولدينا : على $h\ 0\ =g\ 0\ -0=1>0$ و $h\ 1\ =g\ 1\ -1=\int_0^1 f\ t\ dt-1<0$

إذن : $h\ 0\ \times h\ 1\ <0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : $\exists!\alpha\in 0,1\quad g\ \alpha\ =0$

2. أ) ليكن $x\in 0,+\infty$

لدينا : $1-f\ x\ =1-\frac{Arc\tan x}{x}$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\forall x\in 0,+\infty\quad \frac{x}{1+x^2}\leq Arc\tan\ x\ \leq x$

إذن : $\forall x\in 0,+\infty\quad \frac{1}{1+x^2}\leq\frac{Arc\tan\ x}{x}\leq 1$

إذن : $\forall x\in 0,+\infty\quad -1\leq-\frac{Arc\tan\ x}{x}\leq-\frac{1}{1+x^2}$

إذن : $\forall x\in 0,+\infty\quad 0\leq 1-\frac{Arc\tan\ x}{x}\leq 1-\frac{1}{1+x^2}$

و منه : $\forall x\in 0,+\infty\quad 0\leq 1-f\ x\ \leq\frac{x^2}{1+x^2}$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x=0$)

ب) ليكن $x\in 0,+\infty$

لدينا : $0\leq 1-f\ x\ \leq\frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $-1 \leq -f\ x\ \leq \frac{-1}{1+x^2}$

إذن : $\frac{1}{1+x^2} \leq f\ x\ \leq 1$

إذن : $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x f\ t\ dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x \leq \int_0^x f\ t\ dt \leq x$

إذن : $f\ x\ \leq \frac{1}{x}\int_0^x f\ t\ dt \leq 1$

إذن : $f\ x\ \leq g\ x\ \leq 1$

إذن : $0 \leq g\ x\ - f\ x\ \leq 1 - f\ x\ \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $0 \leq \frac{1}{x}\ g\ x\ - f\ x\ \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

و منه : $\forall x \in 0,+\infty \quad |g'\ x\ | \leq \frac{1}{2}$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: لدينا :

- ✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α
- ✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α
- ✓ $\forall x \in 0,+\infty \quad |g'\ x\ | \leq \frac{1}{2}$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $|g\ u_n\ - g\ \alpha\ | \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

وبما أن $u_{n+1} = g\ u_n$ و $\alpha = g\ \alpha$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

- ✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$ و $|u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$

إذن : $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$
- و نبين أن : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|}$ $\boxed{a}$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$ $\boxed{b}$

من $\boxed{a}$ و $\boxed{b}$ نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

✓ نستنتج : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$

و بالتالي المتتالية u_n متقاربة و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

つづく