الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2020

- الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (5) صفحات مرقمة من 1/5 إلى 5/5
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري)**.....**3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري)**.....**3.5 نقط**

- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري)**.....**3.5 نقط**

- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)**.....**13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين1 وإما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

التمرين1: (3.5 نقط/ اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين1 فلا تنجز التمرين2)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(D) \; : \; 7x^3 - 13y = 5$

1- ليكن (x, y) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D)

0.5 أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.

0.5 ب) استنتج أن: $x^{12} \equiv 1 \; [13]$

1 ج) بين أن: $x^3 \equiv 10 \; [13]$

0.5 د) استنتج أن: $x^{12} \equiv 3 \; [13]$

1 | 2- استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

التمرين2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين2 فلا تنجز التمرين1)

نرمز بالرمز $M_2(\mathbb{C})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $M_2(\mathbb{C})$ المعرفة بما يلي: $E=\left\{\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{C}\ ;\ y\in\mathbb{C}^*\right\}$

0.5 | 1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{C}),\times)$

0.5 | ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E

0.5 | ج) تحقق أن: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-x\\y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-x\\y&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-x\\y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-x\\y&x\end{pmatrix}$; $(\forall x\in\mathbb{C})(\forall y\in\mathbb{C}^*)$

0.5 | 2- بين أن $(E,\times)$ زمرة غير تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي: $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&-x\\x&1\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{C}^*\right\}$

0.5 | أ) بين أن التطبيق φ المعرف بما يلي: $\varphi(x)=M(x)$; $(\forall x\in\mathbb{C}^*)$ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

1 | ب) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد.

التمرين3: (3.5 نقط/إجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(E)\ :\ z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0.5 | 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E))

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

0.25 | أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$

0.5 | ب) في حالة: $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B ذات الألحاق على التوالي: $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول B إلى O

0.25 | 1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية.

1 | 2- أ) بين أن لحق P هو: $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ وأن لحق R هو: $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 | ب) بين أن لحق Q هو: $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 | 3- بين أن $OQ = PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان.

التمرين4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ ، من }]0;+\infty[\text{ لكل } x \text{ و } f(0) = 0$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0.5 | 1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto \ln(t)$ في المجال $[x,x+1]$ ، بين أن:

$$(P) \quad (\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0.5 | 2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0.5 | ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه.

0.75 | 3- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0.5 | ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على I (يمكن استعمال العبارة (P))

0.25 | ب) اعط جدول تغيرات f

4- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ نضع: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

0.75 | أ) تحقق أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$

ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$

0.5 | ب) بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل على $\mathbb{R}_+^*$ ، حلا وحيدا نرمز إليه بالرمز a

ثم تحقق أن a ينتمي إلى المجال $]1;2[$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$ و $\ln\frac{3}{2}=1.5$)

0.5 | د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x)=x$ هي: 0 و a

0.5 | 5-أ) مثل مبيانيا المنحنى (C)

(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجمي للمنحنى(C))

0.25 | ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0<u_0<a$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

0.5 | 1- بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad 0<u_n<a$

0.5 | 2- أ) بين أن: $g(]0;a])=]0;1[$

0.5 | ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا.

0.25 | ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

0.5 | 3- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $(\forall x\in I)\quad ;\quad F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

1- أ) أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ — 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' — 0.5

ج) استنتج أن F تناقصية قطعا على I — 0.25

2- أ) بين أن: $F(x) \leq (1-x)\ln 2 \quad ; \quad (\forall x \in [1;+\infty[)$ — 0.5

ب) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ — 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: — 0.5

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt$$

ب)أحسب $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$) — 0.5

ج) استنتج أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ — 0.5

د) احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة : $\int_0^1 f(t)dt$ — 0.5

4- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $v_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$: — 0.5

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب) استنتج أن: $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ — 0.5

(لاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$)

ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. — 0.25

انتهى