المملكة المغربية — وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكيها

المركز الوطني للتقويم والامتحانات — مادة الرياضيات — مدة الانجاز : 3 ساعات — المعامل: 7

التمرين الأول: (3 ن)

1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها $\mathrm{r}=\sqrt{3}$: **0,25 + 0,25**

لدينا $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$ معادلة ديكارتية للفلكة (S)

ومنه $(S): x^2-2x+y^2+z^2-2z-1=0$ إذن $(S):(x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-1)^2-1-1=0$

أي $(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3$ إذن $(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

المعادلة المختصرة للفلكة (S) و بالتالي مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها يساوي $\mathrm{r}=\sqrt{3}$

2) أ- ∢ لنبين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ **0,5**

لدينا: $A(1,1,-1)$; $B(0,1,-2)$; $C(3,2,1)$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}(0-1,1-1,-2+1)$ إذن: $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$

و $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$ ومنه: $\overrightarrow{AC}(3-1,2-1,1+1)$ إذن: $\overrightarrow{AC}(2,1,2)$

إذن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

أي: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(0+1)\vec{i}-(-2+2)\vec{j}+(-1-0)\vec{k}$

و بالتالي: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

∢ لنستنتج أن $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC): **0,25**

طريقة1: لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن: $(ABC): 1x+0y-1z+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

و بما أن $A\in(ABC)$ فإن مثلوث إحداثياتها يحقق المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

$A(1,1,-1)\in(ABC)\Leftrightarrow 1-(-1)+d=0$ إذن $2+d=0$ أي $d=-2$

وبالتالي $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

طريقة2: لدينا $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن: $\mathrm{M}(x,y,z)\in(ABC):\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}=0$

$\mathrm{M}(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow 1(x-1)+0(y-1)-1(z+1)=0\Leftrightarrow x-1-z-1=0$

و بالتالي: $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب– لنتحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ ثم لنبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=1$:

لدينا $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) و $\Omega(1,0,1)$

إذن $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ومنه $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1\times1+0-1\times1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1+0-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

إذن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ و $r=\sqrt{3}$ وبما أن $d(\Omega,(ABC))<r$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $R=\sqrt{d^2-r^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$. 0,25+ 0,25+ 0,5

3) أ– لنبين أن $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC) :

بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ المتجهة المنظمية على (ABC) هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و $\Omega\in(\Delta)$

إذن $M(x,y,z)\in(\Delta)$ تكافئ أن $\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=t\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $M\in(\Delta)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\overrightarrow{\Omega M}$ بالتالي: $\begin{cases}x-1=t\\y-0=0\\z-1=-t\end{cases}$

إذن $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ). 0,25

ب– لنبين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$: 0,25

لنحل تحليليا النظمة: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\x-z-2=0\end{cases}$ ومنه $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\1+t-1+t-2=0\end{cases}$

يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\2t-2=0\end{cases}$ يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\2t=2\end{cases}$ يعني $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\t=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1+1=2\\y=0\\z=1-1=0\\t=1\end{cases}$

و بالتالي مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$.

ج– لنستنتج مركز الدائرة (Γ) : 0,25

☆ $H(2;0;0)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هي المسقط العمودي للنقطة Ω مركز الفلكة (S)

و بما أن الفلكة (S) تقطع المستوى (ABC) وفق دائرة فإن $H(2;0;0)$ هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني: (3 ن)

1) لنحل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2-12z+61=0$

لدينا: $a=1\,;\,b=-12\,;\,c=61$ و $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times1\times61=144-244=-100$ 0,25

بما أن $\Delta\neq0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين

$z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{12+10i}{2\times1}=\dfrac{2(6+5i)}{2}$ و $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{12-10i}{2\times1}=\dfrac{2(6-5i)}{2}$

و بالتالي: $z_1=6+5i$ و $z_2=6-5i$ إذن: $S=\{6+5i\,,\,6-5i\}$ 0,25 + 0,25

2) أ- لنحسب $\dfrac{a-c}{b-c}$ و لنستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية: 0,25 + 0,25

لدينا $2=\dfrac{2(2-3i)}{2-3i}=\dfrac{4-6i}{2-3i}=\dfrac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{a-c}{b-c}$ و بما أن $\dfrac{a-c}{b-c}\in\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

ب- لنتحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d=3+6i$:

لدينا $T(C)=D\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\vec{u}\Leftrightarrow d-c=1+5i\Leftrightarrow d=1+5i+c=1+5i+2+i=3+6i$

و بالتالي لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d=3+6i$. 0,25 + 0,25

ج- ⊀ لنبين أن: $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ 0,5

طريقة1: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+10i-15}{2^2+3^2}=\dfrac{-13+13i}{13}=\dfrac{13(-1+i)}{13}$

و منه $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$

طريقة2: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{(2-3i)(-1+i)}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{-2+2i+3i+3}=\dfrac{(1+5i)(-1+i)}{1+5i}=-1+i$

⊀ لنبين أن $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$: 0,25

☆ لدينا $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ ومنه $\left|\dfrac{d-c}{b-c}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

و $\cos(\arg(-1+i))=\dfrac{\mathrm{Re}(-1+i)}{|-1+i|}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\arg(-1+i))=\dfrac{\mathrm{Im}(-1+i)}{|-1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\arg(-1+i)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ و بالتالي $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$.

د- لنستنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$: 0,25 + 0,25

$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\arg\left(\dfrac{d-c}{b-c}\right)=\arg(-1+i)$ و بالتالي $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

التمرين الثالث: (3 ن)

نسحب عشوائيا تآنيا ثلاث بيدقات من كيس يضم ثمان بيدقات

❷❷ ❶❶❶❶❶ ⓿

1) لنبين أن $p(A)=\frac{5}{28}$:

A : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى " : $\{0;1;2\}$

$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_5^1\times C_2^1}{C_8^3}=\frac{1\times5\times2}{56}=\frac{10}{56}$ و بالتالي $p(A)=\frac{5}{28}$ 0,5 + 0,5

2) لنبين أن $p(B)=\frac{5}{56}$:

B : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي5 " : $\{1;2;2\}$

$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^1\times C_2^2}{C_8^3}=\frac{5\times1}{56}$ و بالتالي $p(B)=\frac{5}{56}$ 0,5 + 0,5

3) لنبين أن $p(C)=\frac{3}{8}$:

C : " نحصل على ثلاث بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي4 " : $\{1;1;2\}$ أو $\{0;2;2\}$

$p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_2^2+C_5^2\times C_2^1}{C_8^3}=\frac{1+10\times2}{56}=\frac{21}{56}$ و بالتالي $p(C)=\frac{3}{8}$ 0,5 + 0,5

التمرين الرابع: (3 ن)

1) لنتحقق من أن: $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,25

لدينا $\frac{10u_n-120}{11}=\frac{10u_n+12-132}{11}=u_{n+1}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-12$ وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$

2) أ- لنبين بالترجع أن: $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,5

☆ لنتحقق من أن $u_0<12$: لدينا $u_0=11$ و $11<12$ إذن $u_0<12$ ❶

☆ نفترض أن $u_n<12$ و نبين أن $u_{n+1}<12$:

لدينا حسب فرضية الترجع $u_n<12$ ومنه $u_n-12<0$ و $\frac{10}{11}>0$ إذن $\frac{10}{11}(u_n-12)<0$

أي $u_{n+1}<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ ❷ من ❶ و ❷ نستنتج أن $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n: 0,5

لدينا $\frac{1}{11}(12-u_n)=\frac{10u_n+12-11u_n}{11}=u_{n+1}-u_n=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-u_n$

لدينا $u_n<12$ لكل n من $\mathbb{N}$ومنه $0<12-u_n$ و $11>0$ إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{1}{11}(12-u_n)>0$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$ و بالتالي (u_n) تزايدية قطعا n.

ج- لنستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة: 0,25

لدينا مما سبق أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n ومكبورة بالعدد 12 إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) أ- ✍ لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$: 0,25

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ و $v_n=u_n-12$ إذن $v_{n+1}=\frac{10}{11}v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$.

✍ لنكتب v_n بدلالة n:

لدينا $v_0=u_0-12=11-12=-1$ 0,25 و $v_n=v_0\times q^n=-1\times\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0,25

ب- ☆ لنبين أن $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$: 0,25

لدينا $v_n=u_n-12$ و منه $u_n=v_n+12$ و $v_n=-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

☆ لنحسب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ و $-1<\frac{10}{11}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n=0$ 0,25 إذن $\lim_{n\to+\infty}u_n=12$ 0,25

التمرين الخامس: (8 ن)

I-1) ✍ لنبين أن: x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;1[$: 0,25 + 0,25

لدينا $0<x<1$ و منه $0<x^2<1$ إذن $-1<x^2-1<0$ و بالتالي إشارة x^2-1 سالبة على المجال $]0;1[$. ❶

وإشارة $2x^2\ell n(x)$ هي إشارة $\ell n(x)$ لأن لكل x من $]0;1[$: $2x^2>0$ و $\ell n(x)<0$ على المجال $]0;1[$

و بالتالي إشارة $2x^2\ell n(x)$ سالبة على المجال $]0;1[$.❷

إذن x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;1[$.

✍ لنستنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$: 0,25

من❶ و ❷ نستنتج أن إشارة $x^2-1+2x^2\ell n(x)$ سالبة على المجال $]0;1[$ أي g سالبة على المجال $]0;1[$

(لأن مجموع دالتين سالبتين $x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto 2x^2\ell n(x)$ هي دالة سالبة) و $g(1)=0$

إذن نستنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

2) ✍ لنبين أن: x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1;+\infty[$: 0,25 + 0,25

لدينا $x>1$ و منه $x^2>1$ إذن $x^2-1>0$ و بالتالي إشارة x^2-1 موجبة على المجال $]1;+\infty[$. ❸

وإشارة $2x^2\ell n(x)$ هي إشارة $\ell n(x)$ لأن لكل x من $]1;+\infty[$: $2x^2>0$ و $\ell n(x)>0$ على المجال $]1;+\infty[$

و بالتالي إشارة $2x^2\ell n(x)$ موجبة على المجال $]1;+\infty[$.❹

إذن x^2-1 و $2x^2\ell n(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1;+\infty[$.

✍ لنستنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$: 0,25

من❸ و ❹ نستنتج أن إشارة $x^2-1+2x^2\ell n(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ أي g موجبة على المجال $[1;+\infty[$

(لأن مجموع دالتين موجبتين $x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto 2x^2\ell n(x)$ هي دالة موجبة) و $g(1)=0$

إذن نستنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$.

II(1 أ– لنبين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ولنؤول النتيجة مبيانيا: 0,25 + 0,25

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x^2-1)=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ell n(x)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x^2-1)\ell n(x)=(-1)\times(-\infty)$ وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$

و منه نستنتج أن (C) منحنى الدالة f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$.

ب– ✍ لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: 0,25

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\ell n(x)=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب– ✍ لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ و لنستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$: 0,25 + 0, 5

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ell n(x)=+\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه نستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$. 2) أ–

✍ لنبين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$: 1

لدينا لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-1)\ell n(x)$

ومنه $\frac{x^2-1+2x^2\ell n(x)}{x}=2x\ell n(x)+(x^2-1)\left(\frac{1}{x}\right)=f'(x)=(x^2-1)'\ell n(x)+(x^2-1)(\ell n(x))'$

و $g(x)=x^2-1+2x^2\ell n(x)$ وبالتالي $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

✍ لنؤول هندسيا النتيجة $f'(1)=0$: 0,25

لدينا $f'(1)=0$ و منه يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا في النقطة $A(1,0)$

ب– لنستنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $[0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$:0,25 + 0,25

لدينا $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ إذن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$:

✰ إذا كان $x\in]0,1]$ فإن $g(x)\le 0$ أي $f'(x)\le 0$ و بالتالي f تناقصية على المجال $]0,1]$.

✰ إذا كان $x\in[1,+\infty[$ فإن $g(x)\ge 0$ أي $f'(x)\ge 0$ و بالتالي f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

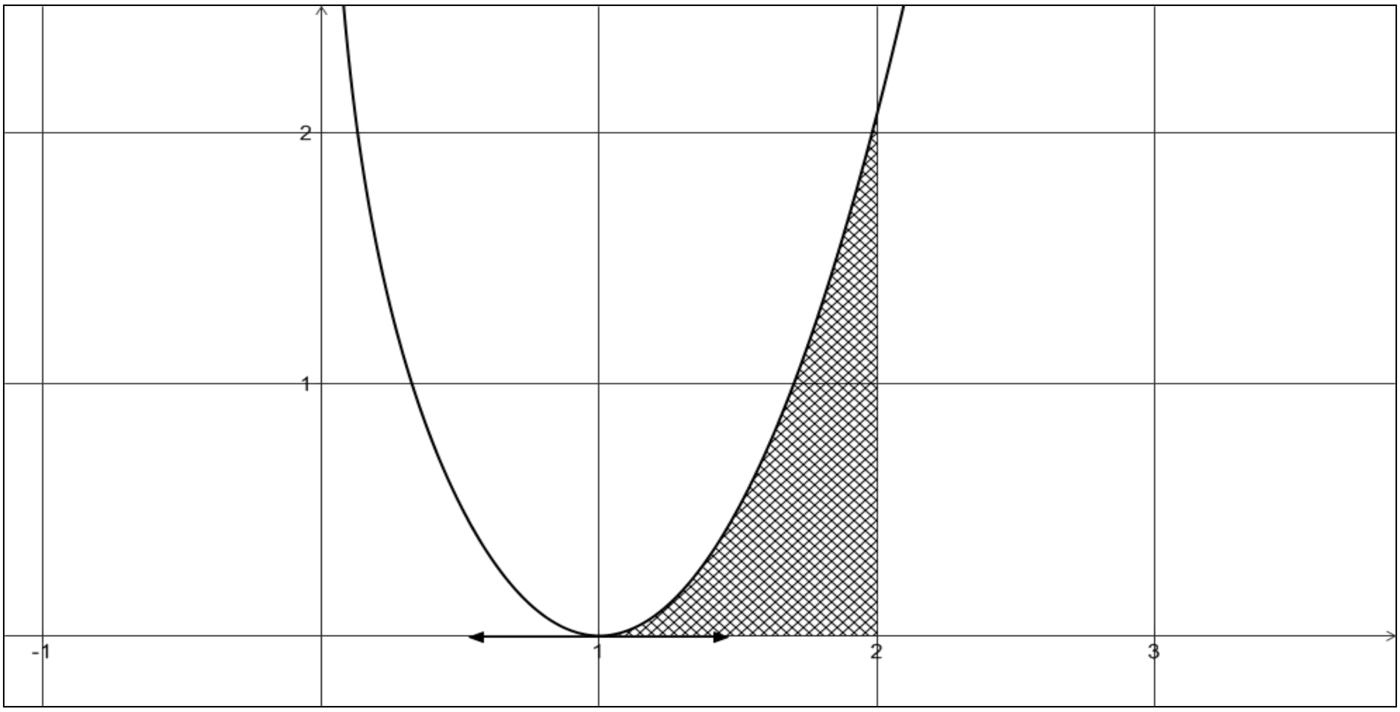
ج– ✍ لننجز جدول تغيرات الدالة f: 0,25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

✍ لنبين أن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$: 0,25

لدينا 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة f عند $x=1$ إذن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

3) لننشئ (C) منحنى الدالة f : 1



4) أ- لنبين أن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$: 0, 5

لدينا $x \mapsto x^3 - 1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $\forall x \in \mathbb{R} \; ; u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = \frac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$

إذن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$.

ب- لنبين باستعمال المكاملة بالأجزاء أن: $\int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1+3\ell n(2))$ 1

$\begin{cases} u'(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = \ell n(x) \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

إذن $\int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)dx$

إذن $\int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ell n(x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-2\right)\ell n(2) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\ell n(1) - \left(\frac{8}{9}-2-\frac{1}{9}+1\right)$

إذن $\int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \frac{2\ell n(2)}{3} - 0 + \frac{2}{9}$ و بالتالي $\int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1+3\ell n(2))$

ج- لنحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$: $1u.a = 9cm^2$ 0,25

لدينا $S = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2-1)\ell n(x)dx = \frac{2}{9}(1+3\ell n(2)) \times 9$ و بالتالي $S = 2(1+3\ell n(2))cm^2$