

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2015  
- الموضوع -

NS 22

ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ  
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ  
ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔالمملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

## تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

## مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتوزع حسب المجالات كما يلي :

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمنتاليات العددية	المسألة

- بالنسبة للمسألة ،  $\ln$  يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

**التمرين الأول: (3 ن)**

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين  $A(2, 1, 0)$  و  $B(-4, 1, 0)$

1) ليكن  $(P)$  المستوى المار من النقطة  $A$  و  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  متجهة منظمية عليه . 0.5

بين أن  $x + y - z - 3 = 0$  هي معادلة ديكرتية للمستوى  $(P)$

2) لتكن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق العلاقة  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  0.75

بين أن  $(S)$  هي الفلكة التي مركزها النقطة  $\Omega(-1, 1, 0)$  و شعاعها 3

3) أ- احسب مسافة النقطة  $\Omega$  عن المستوى  $(P)$  ثم استنتج أن  $(P)$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$  0.5

ب- بين أن مركز الدائرة  $(C)$  هو النقطة  $H(0, 2, -1)$  0.5

4) بين أن  $\overline{OH} \wedge \overline{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$  ثم استنتج مساحة المثلث  $OHB$  0.75

**التمرين الثاني: (3 ن)**

I- نعتبر العدد العقدي  $a$  بحيث  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) بين أن معيار العدد العقدي  $a$  هو  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  0.5

2) تحقق من أن  $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\frac{\pi}{4}$  0.25

3) أ- باخظاظ  $\cos^2 \theta$  ، حيث  $\theta$  عدد حقيقي ، بين أن  $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$  0.25

ب- بين أن  $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$  ( نذكر أن  $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$  ) 0.5

ج- بين أن  $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$  هو شكل مثلثي للعدد  $a$  ثم بين أن  $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$  0.5

II- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين  $\Omega$  و  $A$  اللتين لحقاهما

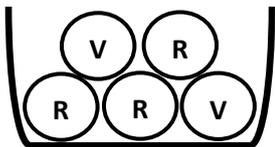
على التوالي هما  $\omega$  و  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  و  $\omega = \sqrt{2}$  و  $R$  الدوران الذي مركزه  $\Omega$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

1) بين أن اللق  $b$  للنقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  هو  $2i$  0.5

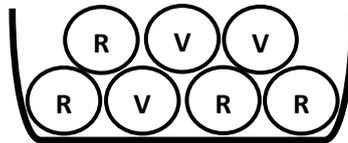
2) حدد مجموعة النقط  $M$  ذات اللق  $z$  بحيث  $|z - 2i| = 2$  0.5

**التمرين الثالث: (3 ن)**

يحتوي صندوق  $U_1$  على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء ( لا يمكن التمييز بينها باللمس )  
و يحتوي صندوق  $U_2$  على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان ( لا يمكن التمييز بينها باللمس )



الصندوق  $U_2$



الصندوق  $U_1$

I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق  $U_1$  2

ليكن  $A$  الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين "

و  $B$  الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

بين أن  $p(A) = \frac{12}{35}$  و  $p(B) = \frac{1}{7}$

II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من  $U_1$  ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من  $U_2$  1

ليكن  $C$  الحدث : " الحصول على ثلاث كرات حمراء "

بين أن  $p(C) = \frac{6}{35}$

**المسألة : (11 ن)**

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  بحيث :  $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة : 2 cm)

(I) بين أن  $D_f = ]0, e[ \cup ]e, +\infty[$  هي مجموعة تعريف الدالة  $f$

(2) أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$  و أول هندسيا النتيجة المتوصل إليهما .

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مقاربا بجوار  $+\infty$  يتم تحديده .

ج- بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  لاحظ أن  $x(1-\ln x) = x - x \ln x$ )

(3) أ- بين أن  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$  لكل  $x$  من  $D_f$

ب- بين أن الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0, 1[$  و تزايدية على كل من المجالين  $[1, e[$  و  $]e, +\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $D_f$

(II) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

و ليكن  $(C_g)$  المنحنى الممثل للدالة  $g$  في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)

(1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $(E)$  التالية :  $g(x) = 0$  ,  $x \in ]0, +\infty[$

ب- نعطي جدول القيم التالي :

$x$	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلا  $\alpha$  بحيث  $2,2 < \alpha < 2,3$

(2) أ- تحقق من أن  $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$  لكل  $x$  من  $D_f$

ب- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  يقطع المنحنى

$(C_f)$  في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و  $\alpha$

ج- حدد ، انطلاقا من  $(C_g)$  ، إشارة الدالة  $g$  على المجال  $[1, \alpha]$  و بين أن  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[1, \alpha]$

(3) أنشئ ، في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ، المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$

(4) أ- بين أن  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$  (لاحظ أن :  $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1-\ln x}$  لكل  $x$  من  $D_f$ )

ب- احسب ، ب  $cm^2$  ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين

الذين معادلتهما  $x = \sqrt{e}$  و  $x = 1$

(III) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $IN$

(1) بين بالترجع أن  $1 \leq u_n \leq \alpha$  لكل  $n$  من  $IN$

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال (II) 2 ج-)

(3) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها .

