

تصحيح التمرين الأول

(1) أ- لدينا :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in (S) & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z = 1 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 2(1)x + (1)^2 + y^2 - 2(1)y + (1)^2 + z^2 - 2(1)z + (1)^2 = 1 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 \\
 & \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4 \\
 & \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (2)^2 \\
 & \text{إذن } (S) \text{ هي الفلكة التي مركزها } \Omega(1,1,1) \text{ و شعاعها } R = 2
 \end{aligned}$$

ب-

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|(1)-(1)|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = 0 \quad \checkmark$$

✓ بما أن $d(\Omega, (P)) < R$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)

ج- بما أن $d(\Omega, (P)) = 0$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) (الدائرة الكبرى)

و منه مركز الدائرة (C) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 2.

(مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة على المستوى (P) أي في هذه الحالة هو النقطة Ω)

$$(r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, (P))} = \sqrt{2^2 - 0^2} = 2 \text{ شعاعها})$$

(2) أ- لدينا $y - z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) إذن $\vec{u}(0,1,-1)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P)

و بما أن $(\Delta) \perp (P)$ فإن $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ب-

$$\checkmark \text{ لدينا : } \vec{u}(0,1,-1) \text{ و } \overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$$

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} \quad \text{إذن}$$

$$\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = 2 \text{ و منه}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{و لدينا :}$$

$$\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\| \quad \text{و بالتالي :}$$

$$d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{2} \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

إذن بما أن $d(\Omega, (\Delta)) < R$ فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ج- تمثيل بارميتري للمستقيم } (\Delta) \text{ هو :}$$

لنحدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x, y, z) \in (\Delta) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

بعد التعويض نحصل على المعادلة $t^2 - 4t + 3 = 0$

$$\Delta = 4 \quad \text{لدينا :}$$

$$t = 1 \quad \text{أو} \quad t = 3 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 1 = -1 : t = 1 \quad \star \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 3 = 1 : t = 3 \quad \star \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد أربع كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = C_{10}^4 = 210 \quad \text{لدينا :}$$

(1)

✓ A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط "

$$\overline{VVVV}$$

$$\text{card } A = C_2^1 \times C_8^3 = 2 \times 56 = 112 \quad \text{لدينا :}$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15} \quad \text{إذن :}$$

✓ B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

$$\overline{RRR\bar{R}} \quad \text{أو} \quad \overline{BBB\bar{B}}$$

$$\text{card } B = C_3^3 \times C_7^1 + C_5^3 \times C_5^1 = 1 \times 7 + 10 \times 5 = 57 \quad \text{لدينا :}$$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70} \quad \text{إذن :}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة .

$$X = 2 \rightarrow \overline{VVVV} \quad \text{أ-}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{2}{15}$$

ب-

$$X = 0 \rightarrow \overline{\overline{VVVV}} \quad \checkmark$$

$$p(X = 0) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

$$X = 1 \rightarrow \overline{VV\overline{\overline{VV}}} \quad \checkmark$$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{8}{15}$$

$$p(X = 2) = \frac{2}{15} \quad \checkmark$$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2
$(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

الأمّل الرياضي :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{3}\right) + \left(1 \times \frac{8}{15}\right) + \left(2 \times \frac{2}{15}\right) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 4z + 8 = 0$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16$$

لدينا : $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين

$$\text{أو } z = \frac{-4 + i\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i$$

$$z = \frac{-4 - i\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i$$

إذن : $S = \{-2 - 2i, -2 + 2i\}$

(2) أ-

$$\begin{aligned} z' - a &= e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)} (z - a) \\ z' - (-2 + 2i) &= -i (z - (-2 + 2i)) \\ z' + 2 - 2i &= -i (z + 2 - 2i) \\ z' + 2 - 2i &= -iz - 2i - 2 \\ z' &= -iz - 2i - 2 - 2 + 2i \\ z' &= -iz - 4 \end{aligned}$$

ب-

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} -ic - 4 &= -i(4 + 8i) - 4 \\ &= -4i + 8 - 4 \\ &= 4 - 4i \\ &= b \end{aligned}$$

إذن : B هي صورة النقطة C بالدوران R

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن } R(C) = B \text{ لدينا } \checkmark$$

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

(3) أ- لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$

$$\omega = \frac{b+c}{2} = \frac{4-4i+4+8i}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i \text{ : إذن}$$

$$|c - \omega| = |(4+8i) - (4+2i)| = |6i| = 6 \text{ : و منه}$$

ب- لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z - \omega| = 6$

$$|z - \omega| = 6 \Leftrightarrow \Omega M = 6$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها Ω و شعاعها 6

و لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$ و $|c - \omega| = 6$ إذن $\Omega C = \Omega B$

و من الواضح أن $|a - \omega| = |-2 + 2i - 4 - 2i| = |-6| = 6$ إذن $\Omega A = \Omega C = \Omega B$
و بالتالي : مجموعة النقط M هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تصحيح التمرين الرابع

(1) أ-

✓ من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 17$$

$$u_0 > 16$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n > 16$$

و نبين أن $u_{n+1} > 16$ ؟

حسب الافتراض لدينا : $u_n > 16$

$$\frac{1}{4}u_n > 4$$

$$\frac{1}{4}u_n + 12 > 4 + 12$$

$$u_{n+1} > 16$$

✓ نستنتج أن : $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 12 - u_n = \left(\frac{1}{4} - 1\right)u_n + 12 = \frac{-3}{4}u_n + 12 = \frac{-3}{4}(u_n - 16)$$

$$\frac{-3}{4}(u_n - 16) < 0 \quad \text{إذن} \quad u_n - 16 > 0 \quad \text{إذن} \quad u_n > 16$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

وبالتالي (u_n) تناقصية.

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة فإن (u_n) متقاربة .

(2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4}u_n - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4}v_n$$

$$\text{إذن : } v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\text{و منه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{4} \text{ و حدها الأول : } v_0 = u_0 - 16 = 17 - 16 = 1$$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \times q^n \text{ إذن : } v_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{ولدينا : } v_n = u_n - 16 \text{ إذن : } u_n = 16 + v_n$$

$$\text{و منه : } u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ج-

$$u_n < 16,0001 \Leftrightarrow 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

إذن : أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16,0001$ هي : $\boxed{n=7}$

تصحيح المسألة

■I

$$g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0 = 1 - 1 \times 1 = 0 \quad (1)$$

(2) مبيانيا :

✓ على المجال $]-\infty, 0]$: لدينا (C_g) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن : $g(x) \geq 0$

✓ و على المجال $[0, +\infty[$: لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن : $g(x) \leq 0$

■II

(1) أ-

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x = x + 1 - x^2 e^x - e^x = x + 1 - 4 \times \frac{x^2}{4} \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x$$

$$\text{إذن : } f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right.$$

ب-

$$\checkmark \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right. : \text{لأن}$$

✓ بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ فإن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب

للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج- لدينا : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f(x) - (x+1) = -(x^2 + 1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه : $f(x) - (x+1) < 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و بالتالي : المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D)

$$(2) \text{ أ- لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x} \right) e^x \right] = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} - \left(x + \frac{1}{x} \right) e^x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن}$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x} \right) e^x = -\infty$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب .

(3) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1-(x^2+1)e^x)' \\ &= 1 - \left((x^2+1)'e^x + (x^2+1)(e^x)' \right) \\ &= 1 - (2xe^x + (x^2+1)e^x) \\ &= 1 - (x^2+2x+1)e^x \\ &= 1 - (x+1)^2 e^x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ على المجال $]-\infty, 0]$: $g(x) \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$ و منه f تزايدية

✓ على المجال $[0, +\infty[$: $g(x) \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$ و منه f تناقصية

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

ج- الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

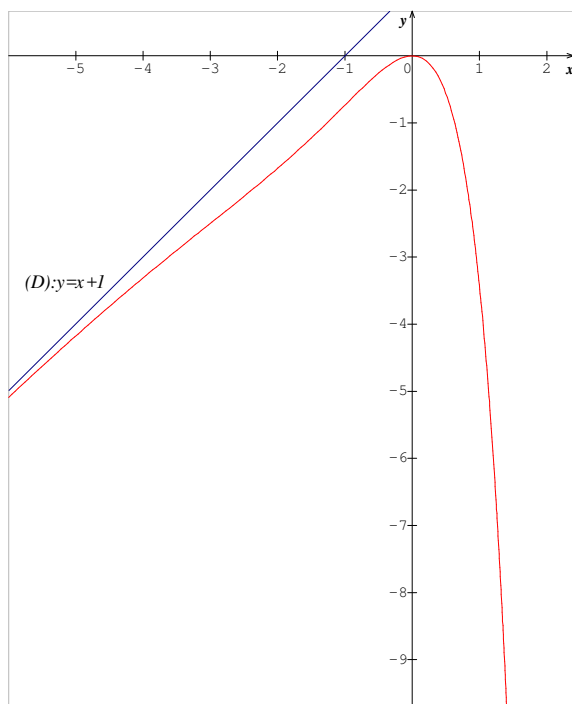
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (f')'(x) \\
 &= g'(x) \\
 &= (1 - (x+1)^2 e^x)' \\
 &= 0 - \left(((x+1)^2)' e^x + (x+1)^2 (e^x)' \right) \\
 &= - (2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x) \\
 &= -(x+1)e^x (2+x+1) \\
 &= -(x+1)(x+3)e^x
 \end{aligned}$$

لدينا : $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+1)(x+3)$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العددين -3 و -1 فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1

(4)



(5) أ-



✓ الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = 1e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $H'(x) = h(x)$

$$\int_{-1}^0 xe^x dx = [(x-1)e^x]_{-1}^0 = (-1) - (-2e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1 \quad \text{❖}$$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx &= [(x^2 + 1)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2xe^x dx \\ &= 1 - 2e^{-1} - 2 \int_{-1}^0 xe^x dx \\ &= 1 - \frac{2}{e} - 2 \left(\frac{2}{e} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} + 2 \\ &= 3 - \frac{6}{e} \\ &= 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right) \end{aligned}$$

ج- مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأرتيب و المستقيم الذي معادلته

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 |f(x) - (x+1)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_{-1}^0 ((x+1) - f(x)) dx \times 2cm \times 2cm \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 1) e^x dx \times 4cm^2 \\ &= 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right) \times 4cm^2 \\ &= 12 \left(1 - \frac{2}{e} \right) cm^2 \end{aligned}$$

つづく