تصحيح وطني 2019

الدورة الاستدراكية - علوم تجريبية

التمرين الأول (3 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1,2,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(1,1,3)$	
1) أ) تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.5
2) نعتبر النقطتين $E(5,1,4)$ و $F(-1,1,12)$ و (S) مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$	0.75
بين أن المجموعة (S) فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$	
3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى ABC يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=4$	0.5

التمرين الثاني (3 نقاط) :

1) أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$	0.75
ب) نضع $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب a على الشكل المثلثي	0.5
2) نعتبر العدد العقدي $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2=i$	0.5
3) نضع $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4+1=a$	0.5
4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة B التي لحقها b و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ) ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة B بالدوران R ، بين أن $c=ib$	0.5
ب) استنتج طبيعة المثلث OBC	0.25

التمرين الثالث (3 نقاط) :

يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق . لتكن الأحداث التالية : A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة " و C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "	
1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{8}{27}$	2

1	**2)** أحسب $p(C)$

المسألة (11 نقطة) :

	الجزء الأول:
	لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f\ x = 2+8(\frac{x-2}{x})^2 e^{x-4}$
	و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)
	1) أ) تحقق أن $\lim_{x\to-\infty} f\ x = 2$ و أول النتيجة هندسيا
0.5	
0.5	ب) تحقق أن $\lim_{x\to 0} f\ x = +\infty$ و أول النتيجة هندسيا
0.5	**2)** أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f\ x$
0.5	ب) بين أن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$
0.75	**3)** أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$، $f'\ x = \frac{8\ x-2\ \ x^2-2x+4\ e^{x-4}}{x^3}$
0.25	ب) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$، $x^2-2x+4>0$
0.75	ج) بين أن f تناقصية قطعا على المجال $0,2$ و تزايدية قطعا على كل من المجالين $-\infty,0$ و $2,+\infty$
0.5	د) ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$
1	**4)** أنشئ المنحنى C في المعلم $O,\vec{i},\vec{j}$
0.5	**5)** أ) تحقق أن الدالة $H: x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h: x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $2,4$
0.25	ب) تحقق من أن $f\ x = 2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$
0.5	ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4}dx$
0.75	د) أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$
	الجزء الثاني:
	1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $2,4$ بما يلي : $g\ x = 8\ x-2\ e^{x-4}-x^2$
0.25	أ) أحسب $g\ 4$
0.5	ب) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $g\ x = -\ x-4\ ^2 e^{x-4}+x^2\ e^{x-4}-1$
0.5	ج) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $e^{x-4}-1\leq 0$ ثم استنتج أن لكل x من المجال $2,4$: $g\ x \leq 0$
0.5	**2)** أ) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right) g\ x$
0.25	ب) استنتج أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x \leq x$

3) لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=f\ u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2\leq u_n\leq 4$	0.5
ب) حدد رتابة المتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة	0.5
ج) أحسب نهاية المتتالية u_n	0.75

تصحيح التمرين الأول

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\ 2,-3,4$ و $\overrightarrow{AC}\ 0,-1,1$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 1.\vec{i}-2.\vec{j}-2.\vec{k}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ 1,-2,-2$ متجهة منظمية للمستوى ABC

إذن معادلة ديكارتية للمستوى ABC تكتب على شكل : $1.x-2.y-2.z+d=0$

و لدينا : $A\ 1,2,2\in ABC$

إذن : $1.\ 1-2.\ 2-2.\ 2+d=0$

و منه : $d=7$

نستنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى ABC

2) لدينا S مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$

إذن S هي الفلكة التي أحد أقطارها EF

و بالتالي : Ω مركز الفلكة هو منتصف القطعة EF و شعاعها R : $R=\dfrac{EF}{2}$

$$\begin{cases} x_\Omega=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{5+(-1)}{2}=2\\ y_\Omega=\dfrac{y_E+y_F}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1\\ z_\Omega=\dfrac{z_E+z_F}{2}=\dfrac{4+12}{2}=8\end{cases}$$

و $R=\frac{EF}{2}=\frac{\sqrt{-1-5\ ^2+\ 1-1\ ^2+\ 12-4\ ^2}}{2}=\frac{\sqrt{36+0+64}}{2}=\frac{10}{2}=5$

و منه : المجموعة S فلكة مركزها هو النقطة $\Omega\ 2,1,8$ و شعاعها $R=5$

3) أ) $d\ \Omega,\ ABC\ =\frac{|\ 2\ -2\ 1\ -2\ 8\ +7|}{\sqrt{1\ ^2+\ -2\ ^2+\ -2\ ^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

ب) بما أن $d\ \Omega,\ ABC\ <R$ فإن المستوى ABC يقطع الفلكة S وفق دائرة Γ شعاعها r

حيث : $r=\sqrt{R^2-\ d\ \Omega,\ ABC\ ^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

لدينا : $\Delta=\ -3\ ^2-4\ 1\ \ 3\ =-3$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\frac{-\ -3\ -i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $z=\frac{-\ -3\ +i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه : $S=\left\{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ب) لدينا : $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

معيار العدد a هو : $|a|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$

لنكتب العدد a على الشكل المثلثي:

$$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

2) $b^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ 1+i\ \right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ 1+i\ ^2=\frac{2}{4}\ 1+2i-1\ =\frac{4i}{4}=i$

3) حسب علاقة موافر :

$$h^4=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن : $h^4+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a$

4) أ) لدينا $\frac{\pi}{2}$: $C\ c$ صورة النقطة $B\ b$ بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} c-0 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\ b-0 \\ c &= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).b \end{aligned}$$

و منه : $c=ib$

ب) لدينا : $R\ B=C \Leftrightarrow \begin{cases} OB=OC \\ \overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} \equiv \frac{\pi}{2}\ 2\pi \end{cases}$

إذن المثلث OBC متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق ."

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega=6^3=216$

1) A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

$RRR\quad N \qquad\qquad BBBأو NN$

$$cardA=1^3+2^3+3^3=36$$

$$p\ A=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$$

B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

$\overline{B}\overline{B}\overline{B}$

$$cardB=4^3=64$$

$$p\ B=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$

2) C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

$$\begin{cases} BB\overline{B} \\ B\overline{B}B \\ \overline{B}BB \end{cases}$$

$$cardC = \frac{3!}{2!\times 1!}\ 2^2\times 4^1\ = 48$$

$$p\ \ C\ = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

تصحيح المسألة

الجزء الأول:

1) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f\ \ x\ = \lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = 2$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$

ب)

$$\lim_{x\to 0} f\ \ x\ = \lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\ \ ^2}{x^2} = +\infty \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 0} x-2\ \ ^2 = 4 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \end{cases} \\ \lim_{x\to 0} e^{x-4} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^4} = \frac{1}{e^4} \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ)

$$\lim_{x\to+\infty} f\ \ x\ = \lim_{x\to+\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ \ x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\frac{e^{x-4}}{x} = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-4}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^4}\dfrac{e^x}{x} = +\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty\right) \end{cases}$$

التأويل الهندسي:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\ x}{x} = +\infty$

فإن : المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $-\infty,0$ و $0,+\infty$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f'\ x &= \left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\
&= 0+8\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\
&= 8\left(\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \left(e^{x-4}\right)'\right) \\
&= 8\left(2\left(\frac{x-2}{x}\right)'\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 (x-4)' e^{x-4}\right) \\
&= 8\left(2\times\frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4} + \frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right) \\
&= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4}{x}+x-2\right) \\
&= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4+x^2-2x}{x}\right)
\end{aligned}$$

و منه لكل x من $\mathbb{R}^*$، $f'\ x = \dfrac{8\ x-2\ \ x^2-2x+4\ e^{x-4}}{x^3}$

ب) ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $x^2-2x+4 = x^2-2x+1+3 = x-1^{\ 2}+3$

إذن من الواضح أن : لكل x من $\mathbb{R}$، $x^2-2x+4>0$

ج) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

لدينا $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3} = \dfrac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2} \times \dfrac{x-2}{x}$

بما أن : $\dfrac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\dfrac{x-2}{x}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

✓ على المجال $]0,2[$: لدينا $f'(x) \leq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

إذن f تناقصية قطعا

✓ على المجال $[2,+\infty[$: لدينا $f'(x) \geq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

إذن f تزايدية قطعا

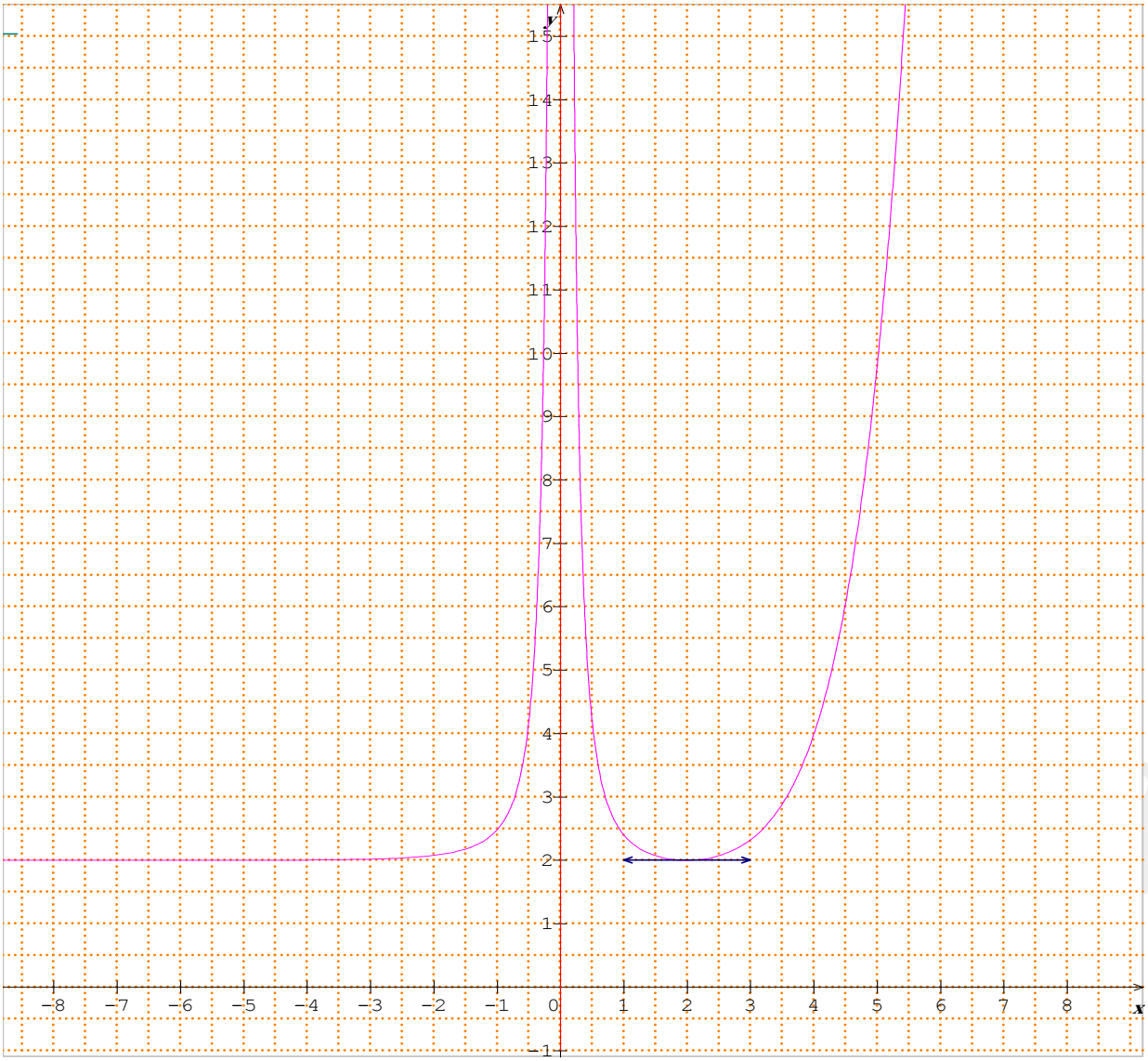
✓ على المجال $]-\infty,0[$: لدينا $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا

د) جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(4



(5 أ)

✓ الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ قابلة للاشتقاق على المجال $2,4$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $2,4$

✓ ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned}
H'\ x &= \left(\frac{1}{x}e^{x-4}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)' e^{x-4} + \frac{1}{x}\ e^{x-4}\ ' \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}\ x-4\ ' e^{x-4} \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} \\
&= \left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{x-4} \\
&= \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4}
\end{aligned}$$

إذن $\forall x \in 2,4 \quad H'\ x = h\ x$

وبالتالي : الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $2,4$

ب)

$$\begin{aligned}
2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} &= 2+8e^{x-4}\left(1-4\frac{x-1}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x-2\ ^2}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \\
&= f\ x
\end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 e^{x-4}dx &= \int_2^4 x-4\ ' e^{x-4}dx \\
&= \left[e^{x-4}\right]_2^4 \\
&= e^0 - e^{-2} \\
&= 1-\frac{1}{e^2} \\
&= \frac{e^2-1}{e^2}
\end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^4 |f\ \ x\ |dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_2^4 f\ \ x\ \ dx \times 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in\ 2;4 \qquad f\ \ x\ \ \geq 0 \\
&= \int_2^4 \left(2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}\right)dx.\mathrm{cm}^2 \\
&= \left(\int_2^4 2dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx\right).cm^2 \\
&= \left(2x\ \ {}_2^4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left[H\ \ x\ \right]_2^4\right).cm^2 \\
&= \left(8-4\ \ + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2}\right)\right).cm^2 \\
&= \left(4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 8 + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(-4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(\frac{-4e^2 + 8e^2 - 8 + 16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \frac{4e^2+8}{e^2}.cm^2
\end{aligned}$$

<u>الجزء الثاني:</u>

1) أ)

$$\begin{aligned}
g\ \ 4 &= 8 \times 2e^0 - \ 4\ \ ^2 \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ب)

ليكن $x \in\ 2,4$

لدينا :

$$\begin{aligned}
-\ \ x-4\ \ ^2 e^{x-4} + x^2\ \ e^{x-4} - 1 &= -x^2 + 8x - 16\ \ e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - x^2 \\
&= -x^2 + 8x - 16 + x^2\ \ e^{x-4} - x^2 \\
&= 8\ \ x - 2\ \ e^{x-4} - x^2 \\
&= g\ \ x
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من المجال $2,4$ ، $g\ x = -\ x-4\ ^2 e^{x-4} + x^2\ e^{x-4} - 1$

ج)

ليكن $x \in 2,4$

✓ لدينا $2 \leq x \leq 4$

إذن $-2 \leq x-4 \leq 0$

إذن $e^{x-4} \leq e^0$

إذن $e^{x-4} \leq 1$

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $e^{x-4} - 1 \leq 0$

✓ لدينا $g\ x = -\ x-4\ ^2 e^{x-4} + x^2\ e^{x-4} - 1$

بما أن $-\ x-4\ ^2 e^{x-4} \leq 0$ و $x^2\ e^{x-4} - 1 \leq 0$

فإن $-\ x-4\ ^2 e^{x-4} + x^2\ e^{x-4} - 1 \leq 0$

و منه لكل x من المجال $2,4$: $g\ x \leq 0$

2) أ) ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned} f\ x - x &= 2 + 8\frac{x-2\ ^2}{x^2} e^{x-4} - x \\ &= 8\frac{x-2\ ^2}{x^2} e^{x-4} - \ x-2 \\ &= \frac{x-2}{x^2}\ 8\ x-2\ e^{x-4} - x^2 \\ &= \frac{x-2}{x^2} g\ x \end{aligned}$$

إذن لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right) g\ x$

ب) ليكن $x \in 2,4$

لدينا $f\ x - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right) g\ x$

نعلم أن $x^2 > 0$ و $x-2 \geq 0$ و $g\ x \leq 0$

إذن $\left(\frac{x-2}{x^2}\right) g\ x \leq 0$

إذن $f\ x - x \leq 0$

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x \leq x$

3) أ) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 3$

إذن $2 \leq u_0 \leq 4$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $2 \leq u_n \leq 4$

▷ و نبين أن : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

حسب الافتراض لدينا $2 \leq u_n \leq 4$

و بما أن f متصلة و تزايدية على المجال $2,4$

فإن $f\ 2 \leq f\ u_n \leq f\ 4$

إذن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

✓ نستنتج : أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$

ب)

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعلم أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x \leq x$

و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $f\ u_n \leq u_n$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$

و منه المتتالية u_n تناقصية

✓ بما أن u_n تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فإن u_n متقاربة

ج) لدينا $u_0 = 3 \in 2;4$ و $u_{n+1} = f\ u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ f متصلة على المجال $2,4$

✓ $f\ 2,4 = [f\ 2\ ; f\ 4] = 2;4$

✓ u_n متقاربة

إذن نهاية المتتالية u_n هي حل للمعادلة $f\ x = x$

$$\begin{aligned} f\ x = x &\Leftrightarrow x-2\ g\ x = 0 \\ &\Leftrightarrow x-2 = 0 \quad x \quad g \text{ أو } 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad x \quad = 4 \text{ أو } 4 \end{aligned}$$

بما أن u_n تناقصية فإن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq u_0$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq 3$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 3$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$