تصحيح وطني 2020
الدورة العادية - علوم تجريبية

التمرين الأول (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) أحسب u_1	0.25
2) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$	0.5
3) أ) بين أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$، ثم استنتج أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
ب) أحسب النهاية $\lim u_n$	0.5
4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة ب $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$	0.75
ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$	1

التمرين الثاني (5 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$	
أ) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-4\ \sqrt{6}-\sqrt{2}\ ^2$	0.5
ب) استنتج حلي المعادلة (E)	1
2) نعتبر الأعداد العقدية : $a=\ \sqrt{6}+\sqrt{2}\ +i\ \sqrt{6}-\sqrt{2}$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	
أ) تحقق من أن $b\overline{c}=a$ و استنتج أن $ac=4b$	0.75
ب) أكتب العددين العقديين b و c على الشكل المثلثي	0.5
ج) استنتج أن $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	0.5
3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $O,\vec{u},\vec{v}$ ، نعتبر النقط B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي b و c و d حيث $d=a^4$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$	
أ) تحقق أن $z'=\frac{1}{4}az$	0.5
ب) حدد صورة النقطة C بالدوران R	0.25
ج) حدد طبيعة المثلث OBC	0.25
د) بين أن $a^4=128b$ و استنتج أن النقط O و B و D مستقيمية	0.75

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $0,+\infty$ بما يلي : $g\ x = 2\sqrt{x} - 2 - \ln\ x$	
1) أ) بين أن لكل x من المجال $0,+\infty$ ، $g'\ x = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$	0.5
ب) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $1,+\infty$	0.5
ج) استنتج أن لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \le \ln\ x \le 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن $2\sqrt{x} - 2 \le 2\sqrt{x}$)	0.5
د) بين أن لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \le \frac{\ln\ x\ ^3}{x^2} \le \frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ x\ ^3}{x^2}$	1
2) أ) بين أن الدالة G المعرفة بما يلي : $G\ x = x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $0,+\infty$	0.75
ب) أحسب التكامل $\int_1^4 g\ x\ dx$	0.75

المسألة (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\ x = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2} - 4$	
و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $O,\vec{i},\vec{j}$ (الوحدة : $2cm$)	
1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} f\ x = +\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty} f\ x = -\infty$	0.5
2) أ) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى C بجوار $-\infty$	0.5
ب) حل المعادلة $e^{x-2} - 4 = 0$ ثم بين أن المنحنى C يوجد فوق Δ على المجال $-\infty, 2+\ln 4$ و تحت Δ على المجال $2+\ln 4, +\infty$	0.75
3) بين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f\ x}{x} = -\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.5
4) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'\ x = -\ e^{x-2} - 1\ ^2$	0.5
ب) ضع جدول تغيرات الدالة f	0.25
5) أحسب $f''\ x$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $A\ 2,2$ نقطة انعطاف للمنحنى C	0.75
6) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$	0.5
7) أنشئ Δ و C في نفس المعلم $O,\vec{i},\vec{j}$ (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين: $\ln 2 \simeq 0,7$ و $\ln 3 \simeq 1,1$)	1
8) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$	0.5
ب) أنشئ في نفس المعلم $O,\vec{i},\vec{j}$ المنحنى الممثل للدالة f^{-1} (لاحظ أن المستقيم Δ عمودي على المنصف الأول للمعلم)	0.75
ج) أحسب $f^{-1}{}'\ 2-\ln 3$ (لاحظ أن $f^{-1}\ 2-\ln 3 = 2+\ln 3$)	0.5

تصحيح التمرين الأول

1) $$u_1=\frac{2u_0}{2u_0+5}=\frac{2\times\frac{3}{2}}{2\times\frac{3}{2}+5}=\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$$

2) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$

إذن : $u_0>0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n>0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1}>0$

حسب الافتراض ، لدينا $u_n>0$

إذن $2u_n>0$ و $2u_n+5>0$

إذن $\frac{2u_n}{2u_n+5}>0$

و منه $u_{n+1}>0$

✓ نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$

3) أ)

○ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▪ نعلم أن $u_n>0$ إذن من الواضح أن $u_{n+1}>0$

▪ لدينا $5\leq 2u_n+5$

إذن $\frac{1}{2u_n+5}\leq\frac{1}{5}$

إذن $\frac{1}{2u_n+5}\times 2u_n\leq\frac{1}{5}\times 2u_n$

إذن $u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$

نستنتج أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ لنبين بالترجع أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{3}{2}$

إذن : $0<u_0\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

▷ و نبين أن $0<u_{n+1}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

نعلم أن $\boxed{0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n}$ (1)

وحسب الافتراض لدينا : $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

إذن $\boxed{0<\frac{2}{5}u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

وبالتالي : $0<u_{n+1}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

✓ نستنتج أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب)

○ لدينا $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ بما أن $-1<\frac{2}{5}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\ &= \frac{4(\frac{2u_n}{2u_n+5})}{2(\frac{2u_n}{2u_n+5})+3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{2u_n+5}} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n+15} \\ &= \frac{2\times 4u_n}{5\times(2u_n+3)} \\ &= \frac{2}{5}\times v_n \end{aligned}$$

إذن : $v_{n+1}=\frac{2}{5}\times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=\frac{4u_0}{2u_0+3}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3}=\frac{6}{6}=1$

إذن: $v_n=v_0\times q^n$

إذن : $v_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

و منه : $\boxed{v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

▷ لدينا:

$$v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3} \Leftrightarrow 4u_n = 2u_n v_n + 3v_n$$
$$\Leftrightarrow 4u_n - 2u_n v_n = 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(4-2v_n) = 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n}{4-2v_n}$$

إذن : $\boxed{u_n = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ)

$$\begin{aligned}\Delta &= -2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 - 4\times1\times16\\ &= 4(8+2\sqrt{12})-64\\ &= -32+8\sqrt{12}\\ &= -4\left(8-2\sqrt{12}\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) \ : \ z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

لدينا $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$z = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$ أو $z = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$

$z = \sqrt{2}+\sqrt{6}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ أو $z = \sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

و بالتالي : $S = \left\{\sqrt{2}+\sqrt{6}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) ; \sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right\}$

2) أ)

○

$$\begin{aligned} b\overline{c} &= 1+i\sqrt{3}\ \ \sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i\ \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ &= a \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned} ac &= b\overline{c}c \\ &= b\times|c|^2 \\ &= b\times\left(\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}\right)^2 \\ &= 4b \end{aligned}$$

ب)

▷ لدينا : $b=1+i\sqrt{3}$

معيار العدد b : $|b|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$$b=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

▷ لدينا : $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

معيار العدد c : $|c|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{4}=2$

$$c=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ج) لدينا $ac=4b$

إذن $a=4\dfrac{b}{c}$

إذن $a=4\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=4\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

3) أ)

z' M' صورة النقطة z M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$

$$z'-0=e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0)$$
$$z'=\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z$$
$$z'=\frac{1}{4}az$$

ب) لنحدد صورة النقطة C بالدوران R

لدينا $\frac{1}{4}ac=\frac{1}{4}\times 4b=b$

إذن B هي صورة C بالدوران R

ج) لدينا B هي صورة C بالدوران R

إذن $OC=OB$ و $\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}}\equiv\frac{\pi}{12}\ 2\pi$

و منه المثلث OBC متساوي الساقين

د)

▷ لدينا $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

إذن حسب علاقة موافر :

$$a^4=4^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{12}\right)\right)=256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=128\ 1+i\sqrt{3}\ =128b$$

▷ $\frac{d-0}{b-0}=\frac{a^4}{b}=\frac{128b}{b}=128$

بما أن $\frac{d-0}{b-0}\in\mathbb{R}$ فإن النقط O و B و D مستقيمية.

تصحيح التمرين الثالث

1) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0,+\infty$

ليكن $x\in 0,+\infty$

لدينا: $g'\ x\ =\ 2\sqrt{x}-2-\ln\ x\ '=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

إذن : لكل x من المجال $0,+\infty$ ، $g'\ x\ =\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب) ليكن $x\in 1,+\infty$

لدينا $g'\ x\ =\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

بما أن $x>0$ فإن إشارة $g'\ x$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

نعلم أن $x\geq 1$

إذن $\sqrt{x}\geq 1$

إذن $\sqrt{x}-1\geq 0$

و منه $g'\ x\ \geq 0$ لكل x من $1,+\infty$

و بالتالي الدالة g تزايدية على المجال $1,+\infty$

ج) ليكن $x\in 1,+\infty$

▷ لدينا $1\leq x$ إذن $0\leq \ln x$

▷ ولدينا $1\leq x$ و الدالة g متصلة و تزايدية على المجال $1,+\infty$

إذن $g\ 1\ \leq g\ \ x$

إذن $0\leq 2\sqrt{x}-2-\ln\ x$ (لأن $g\ 1\ =0$)

إذن $\ln\ x\ \leq 2\sqrt{x}-2$

وبما أن $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$

فإن $\ln\ x\ \leq 2\sqrt{x}$

○ نستنتج أن لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0\leq \ln\ x\ \leq 2\sqrt{x}$

د)

▷ ليكن $x\in 1,+\infty$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1) ج) : $0\leq \ln\ x\ \leq 2\sqrt{x}$

إذن : $0\leq\ \ln\ x\ ^{3}\leq 8x\sqrt{x}$

إذن : $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$

و منه : لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

▷ لدينا لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{x^2} = 0$

2) أ)

✓ الدالة G قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

✓ ليكن $x \in 0,+\infty$

لدينا :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)\right)' \\
&= x'\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)' \\
&= 1\times\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) \\
&= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2}{3}\sqrt{x}-1 \\
&= 2\sqrt{x}-2-\ln x \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

إذن : $G'(x) = g(x)$ لكل x من المجال $0,+\infty$

○ وبالتالي G هي دالة أصلية للدالة g على $0,+\infty$

ب)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 g(x)\,dx &= \left[G(x)\right]_1^4 \\
&= G(4)-G(1) \\
&= 4\left(\frac{5}{3}-\ln 4\right)-1\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{19}{3}-4\ln 4
\end{aligned}$$

تصحيح المسألة

(1

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4 = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\frac{5}{2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^{x}}{2e^{2}}=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4=-4 \end{cases}$$

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4 = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{5}{2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{e^{x}}{2e^{2}}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}-4=+\infty \end{cases}$$

(2 أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ x -\left(-x+\frac{5}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4 = 0$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^{x}}{2e^{2}}=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4=-4 \end{cases}$$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحنى C بجوار $-\infty$

ب)

▷ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{x-2}-4=0$

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{x-2}-4=0 &\Leftrightarrow e^{x-2}=4 \\ &\Leftrightarrow x-2=\ln 4 \\ &\Leftrightarrow x=2+\ln 4 \end{aligned}$$

إذن : $S = 2+\ln 4$

▷ لندرس الوضع النسبي للمنحنى C و المستقيم Δ

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا : $f\ x - \left(-x+\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4$

نعلم أن $e^{x-2}>0$ إذن إشارة $f\ x - \left(-x+\frac{5}{2}\right)$ هي إشارة $-\frac{1}{2}\ e^{x-2}-4$

x	$-\infty$		$2+ln4$		$+\infty$
$(-1/2)(Exp(x-2)-4)$		$+$	0	$-$	

✓ على المجال $-\infty, 2+\ln 4$:

لدينا : $f\ x - \left(-x+\frac{5}{2}\right) \geq 0$

إذن المنحنى C يوجد فوق Δ

✓ و على المجال $2+\ln 4, +\infty$:

لدينا : $f\ x - \left(-x+\frac{5}{2}\right) \leq 0$

إذن المنحنى C يوجد تحت Δ

(3

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ x}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}\ e^{x-2}-4\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن : $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}=-1\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2e^2}\frac{e^x}{x}=-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}e^{x-2}-4=+\infty\end{cases}$$

✓ بما أن $\lim_{x\to+\infty} f\ x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ x}{x}=-\infty$

فإن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right)' \\
&= -1-\frac{1}{2}\left(\left(e^{x-2}\right)'\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)'\right) \\
&= -1-\frac{1}{2}\left((x-2)'e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}(x-2)'e^{x-2}\right) \\
&= -1-\frac{1}{2}\left(e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+\left(e^{x-2}\right)^2\right) \\
&= -\left(1+\frac{1}{2}\left(2\left(e^{x-2}\right)^2-4e^{x-2}\right)\right) \\
&= -\left(1+\left(e^{x-2}\right)^2-2e^{x-2}\right) \\
&= -\left(e^{x-2}-1\right)^2
\end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\left(e^{x-2}-1\right)^2$

ب) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

5) f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\left(e^{x-2}-1\right)^2\right)' \\ &= -2\left(e^{x-2}-1\right)'\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= -2\left(x-2\right)'e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= -2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \\ &= 2e^{x-2}-e^{x-2}+1 \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=2e^{x-2}-e^{x-2}+1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 2 فإن $A(2,2)$ نقطة انعطاف للمنحنى C $(f(2)=2)$

(6

✓ لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع و جداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$)

✓ بما أن $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ فإن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ ولدينا : $f(2+\ln 3)=-(2+\ln 3)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}\left(e^{2+\ln 3-2}-4\right)=2-\ln 3$

إذن $f(2+\ln 3)>0$

و لدينا : $f(2+\ln 4)=-(2+\ln 4)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}\left(e^{2+\ln 4-2}-4\right)=\frac{1}{2}-\ln 4$

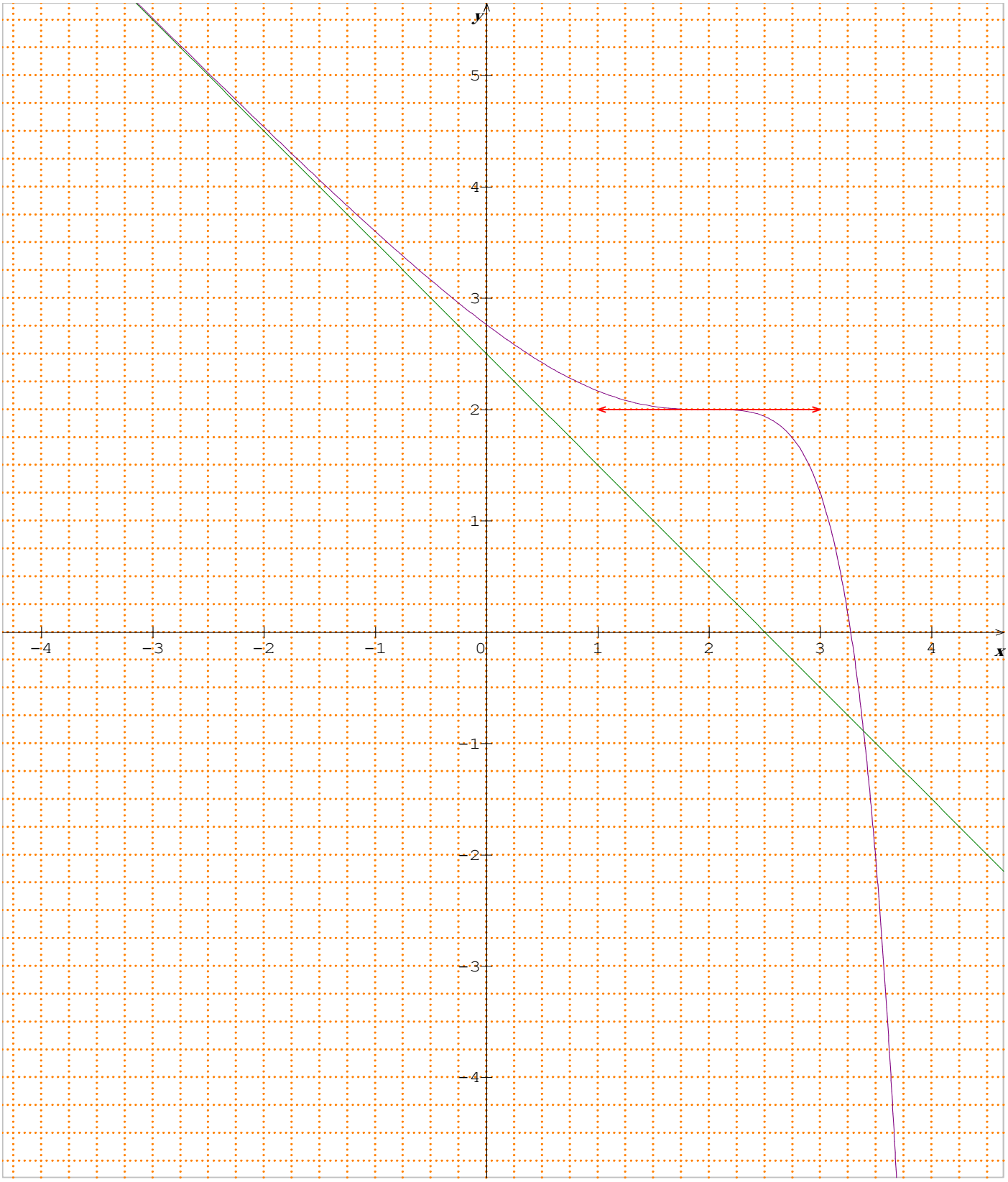
إذن $f(2+\ln 4)<0$

و منه $f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)<0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث

$2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

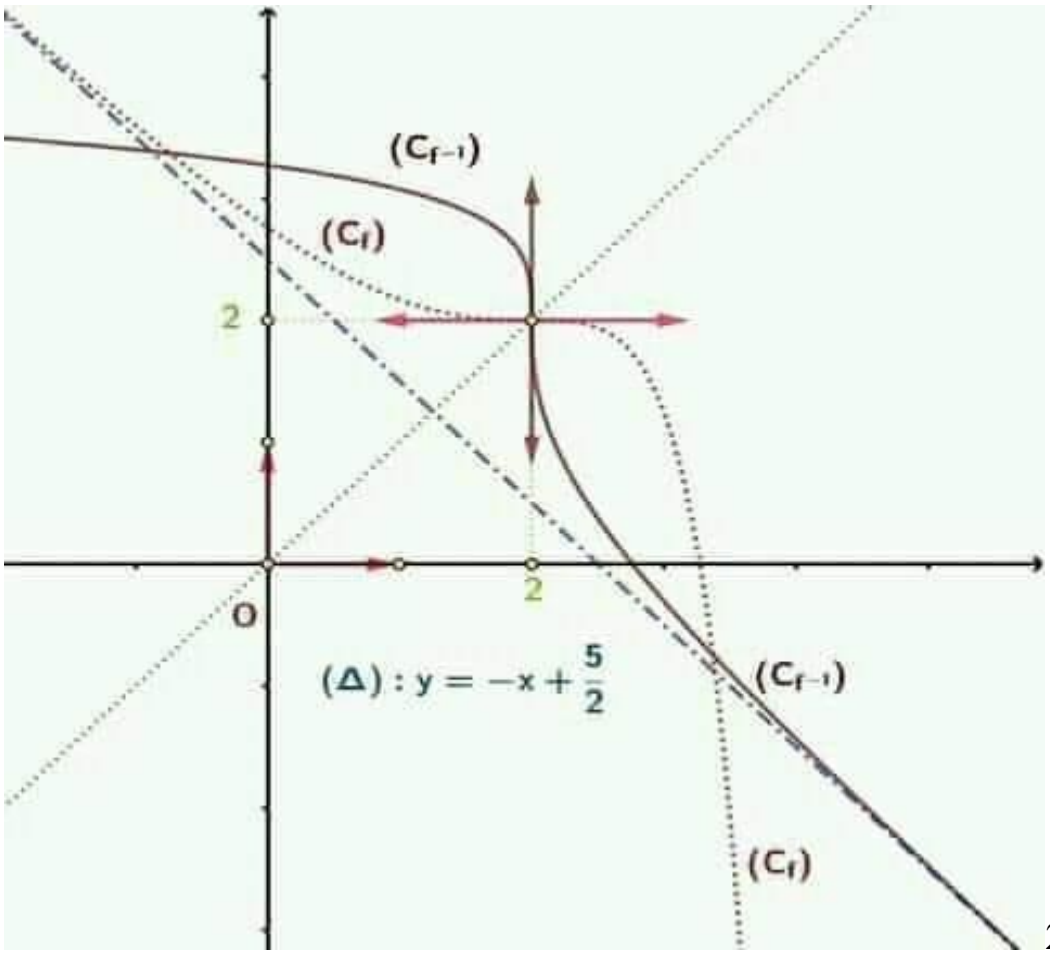
(7



8) أ) بما أن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$

حيث $J = f\ \mathbb{R}\ = f\ \ -\infty,+\infty\ \ = \left]\lim_{x\to+\infty} f\ \ x\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f\ \ x\right[= -\infty,+\infty\ = \mathbb{R}$

ب)



2

ج) $f^{-1}{}'\ \ 2-\ln 3\ = f^{-1}{}'\ \ f\ \ 2+\ln 3\ \ = \dfrac{1}{f'\ 2+\ln 3} = \dfrac{1}{-4}$