

## المعادلات التفاضلية

### I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.  
هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.  
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز  $y$  ( وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل  $u, z, f, \dots$  )  
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال  $y$  التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

### 2- أمثلة

أ)  $y' = 0$  هي معادلة تفاضلية  
الدالة  $y$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $y(x) = 1$  حل خاص للمعادلة  
مجموعة الدوال الثابتة على  $\mathbb{R}$  هي الحل العام للمعادلة  $y' = 0$  .  
ب)  $y' = x^2 - 1$  هي معادلة تفاضلية ذات المجهول  $y$  ( يمكن أن نكتب  $y'(x) = x^2 - 1$  )  
حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة  $x \rightarrow x^2 - 1$  على  $\mathbb{R}$  .  
أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي  $x \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x + k$   
حيث  $k$  عدد حقيقي اعتباطي .

### II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

#### 1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

\* إذا كان  $a = 0$  فإن  $y' = 0$  أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على  $\mathbb{R}$   
\* إذا كان  $a \neq 0$   
نعلم أن  $(e^{ax})' = ae^{ax}$  اذن  $\forall x \in \mathbb{R}$  حل خاص للمعادلة  $y' - ay = 0$   
ليكن  $y$  حلا اعتباطيا للمعادلة  $y' - ay = 0$  نضع  $y(x) = z(x)e^{ax}$   
ومنه  $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$   
أي  $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} = 0$  وبالتالي  $y'(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x)$   
ومنه  $z'(x) = 0$  وبالتالي  $z(x) = \lambda$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي  
اذن  $y(x) = \lambda e^{ax}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي  
نلاحظ أن الحالة  $a = 0$  هي ضمن الحالة العامة .

#### خاصة

المعادلة التفاضلية  $y' = ay$  تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{ax}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

#### نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة  $y' = ay$  يحقق الشرط  $y(x_0) = y_0$  و هي الدالة  $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$   
الشرط  $y(x_0) = y_0$  يسمى الشرط البدئي

#### أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية  $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = 2y$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ حيث  $x \rightarrow \lambda e^{2x}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

2- نحل المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{3}y$  ;  $y(1) = 2$

حل المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{3}y$  ;  $y(1) = 2$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ حيث  $x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

#### 2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

إذا كان  $a = 0$  فإن  $y' = b$  ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال  $f$  حيث  $f(x) = bx + c$

إذا كان  $a \neq 0$  فإن  $y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$

نضع  $z = y + \frac{b}{a}$  ومنه  $z' = y'$

وبالتالي  $y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az \Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

### خاصة

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين حيث  $a \neq 0$

المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي.

### نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة  $y' = ay + b$  يحقق الشرط  $y(x_0) = y_0$  وهي الدالة  $x \rightarrow \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

الشرط  $y(x_0) = y_0$  يسمى الشرط البدئي

### مثال

نحل المعادلة التفاضلية  $y' = -3y + 2$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = -3y + 2$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي

اعتباطي.

### -III حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

**1- المعادلات التفاضلية  $y'' + ay' + by = 0$  حيث  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$**  تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

### 2- بعض الحالات الخاصة

\*- إذا كان  $a = b = 0$  فإن  $y'' = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k, k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة  $y'' = 0$  هي مجموعة الدوال  $x \rightarrow kx + k'$  بحيث  $(k, k') \in \mathbb{R}^2$

\*- إذا كان  $b = 0$  فإن  $y'' + ay' = 0$

$$z' + az = 0 \quad \text{ومنه } y' \quad y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$$

وبالتالي  $y'(x) = \lambda e^{-ax}$  بحيث  $\lambda$  عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة  $y'' + ay' = 0$  هي الدوال الأصلية  $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$

$$\text{أي الدوال} \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu$$

### 3- حل المعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$ ; $(a; b) \neq (0; 0)$

لنبحث عن حلول من نوع  $r \in \mathbb{R}$ ;  $y : x \rightarrow e^{rx}$

$$y \text{ حل للمعادلة } E \Leftrightarrow r^2 e^{rx} + ar e^{rx} + be^{rx} = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

اذن إذا كان  $r$  حل للمعادلة  $r^2 + ar + b = 0$  فإن الدالة  $x \rightarrow e^{rx}$  حل للمعادلة  $E$

المعادلة  $r^2 + ar + b = 0$  تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو  $a^2 - 4b$

### نشاط

1- أ/ حل المميزة للمعادلة  $(E_1): y'' + 3y' - 4y = 0$  واستنتج حلين للمعادلة  $(E_1)$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \alpha e^x + \beta e^{-4x}$  حل للمعادلة التفاضلية  $(E_1)$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

2- أ/ حل المميزة للمعادلة  $(E_2): y'' - 6y' + 9y = 0$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{3x}$  حل للمعادلة التفاضلية  $(E_1)$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

3- أ/ حل المميزة للمعادلة  $(E_3): y'' + 4y' + 13y = 0$

ب/ بين ان الدالتين المعرفتين على  $\mathbb{R}$  بـ  $f: x \rightarrow e^{-2x} \cos 3x$  و  $g: x \rightarrow e^{-2x} \sin 3x$  حلين للمعادلة التفاضلية  $(E_3)$

ج/ بين ان الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \alpha f + \beta g$  حل للمعادلة التفاضلية  $(E_1)$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

### خاصة

لتكن المعادلة التفاضلية  $E: y'' + ay' + by = 0$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  و لتكن  $r^2 + ar + b = 0$  المعادلة المميزة

\*- اذا كان  $a^2 - 4b > 0$  فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين  $r_1$  ;  $r_2$  و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال  $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

\*- اذا كان  $a^2 - 4b = 0$  فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج  $r$  . و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال  $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{rx}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان

\*- اذا كان  $a^2 - 4b < 0$  فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين  $r_1 = p + iq$  و  $r_2 = p - iq$  و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال  $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان اعتباطيان.

**الحل الذي يحقق**  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$  الشرطان  $y'(x_0) = y'_0$  ;  $y(x_0) = y_0$  يسميان الشرطين البدئيين . يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

### ملاحظة

لدينا  $\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left( \frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos (qx - \varphi)$

بوضع  $\cos \varphi = \frac{\alpha}{k}$  ;  $\sin \varphi = \frac{\beta}{k}$  ;  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

تستنتج اذا كان  $a^2 - 4b < 0$  فان  $x \rightarrow ke^{px} \cos (qx - \varphi)$  حيث  $k$  و  $\varphi$  اعتباطيان

**تمرين 1-** حل المعادلة  $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$  و حدد الحل الخاص  $y_1$  حيث  $y_1(0) = 1$  ;  $y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة  $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة  $y'' + 2y' + 5y = 0$

### حالات خاصة

\*- اذا كان  $a > 0$  فان حلول المعادلة التفاضلية  $y'' + ay = 0$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي

$x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{ax} + \beta \sin \sqrt{ax}$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  .

\*- اذا كان  $a < 0$  فان حلول المعادلة التفاضلية  $y'' + ay = 0$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي

$x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-ax}} + \beta e^{-\sqrt{-ax}}$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  .

**مثال** حل المعادلتين  $y'' - 4y = 0$  ;  $y'' + 2y = 0$

حلول المعادلة  $y'' + 2y = 0$  هي الدوال المعرفة بـ  $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  .

حلول المعادلة  $y'' - 4y = 0$  هي الدوال المعرفة بـ  $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  .