إشارة $\ell n(x)$: نعلم أن: $\ell n(1)=0$

لدينا :
1) $x>1 \Rightarrow \ell n(x)>0$
2) $0<x<1 \Rightarrow \ell n(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
$\ell n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

تطبيق:

1) مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\dfrac{2}{\ell n(x)}$
2) مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{\ell n(x)}$
3) حل المعادلة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)=0$
4) حل المتراجحة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)\leq 0$

02. الخاصيات الجبرية:

خاصيات:

لكل a b من $]0,+\infty[$

- $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$ (هذه الخاصية تقبل)
- $\ell n\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$
- $\ell n\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ell n(a)-\ell n(b)$
- $\ell n(a^r)=r\times\ell n(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\ell n(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\times\ell n(a)$ و $\ell n(\sqrt[3]{a})=\dfrac{1}{3}\times\ell n(a)$

❖ نبرهن على: $\ell n\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$.

نأخذ : $b>0$ لدينا:

$$\ell n(1)=0 \Leftrightarrow \ell n\left(\frac{b}{b}\right)=0 \Leftrightarrow \ell n\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \ell n(b)+\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=0 \Leftrightarrow \ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$$

خلاصة: $\ell n\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$

❖ **تطبيق:**

- نضع: $\ell n(2)\simeq 0,69$. أحسب: $\ell n(4)$ و $\ell n(8)$
- بسط: $\ell n(\sqrt{3})+\ell n(9)$

Dreamjob.ma

- بسط: $\ln\left[\left(\sqrt{5}\right)^{2012}\right]-\ln\left(\sqrt{5}\right)$

❖ **ملحوظة:**

الكتابة: $\ln(x)\times\ln(x)=\ln^2(x)$

الكتابة: $\ln(x)\times\ln(x)\times\ln(x)=\ln^3(x)$

بصفة عامة: $\underbrace{\ln(x)\times\ln(x)\times\cdots\times\ln(x)}_{\text{n fois}}=\ln^n(x)$ $n\in\mathbb{N}^*$

❖ **تطبيق:** بسط : $\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)$

03. نهايات اعتيادية :

❖ **خاصيات:**

الدالة: $f(x)=\ln(x)$ معرفة على $]0,+\infty[$ إذن: $D_f=]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ (ومنه الدالة f تقبل مقارب عمودي معادلته: $x=0$ (اي محور الأراتيب))
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ (ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ ومنه $a=0$ (إذن الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل)

❖ **تطبيق:** أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}$

04. نهايات ضرورية معرفتها :

❖ **خاصيات:**

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\times\ln(x)=0^-$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\times\ln(x)=0^-$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$; $n\in\mathbb{N}^*$

❖ **تطبيق:** أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln(x)}$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}$

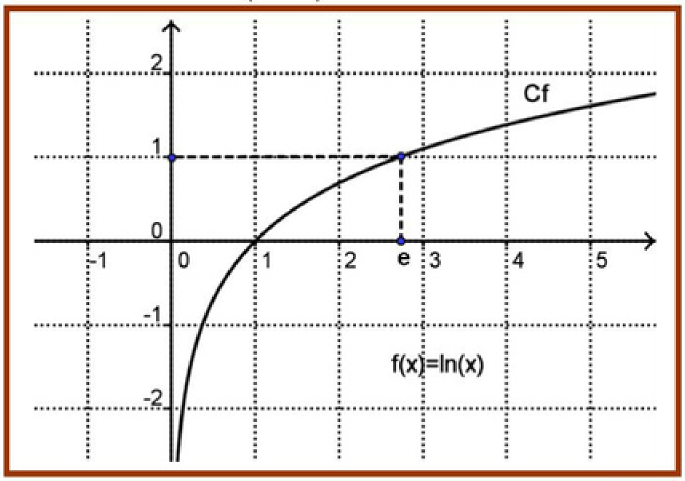
05. دراسة الدالة $f(x)=\ln(x)$:

- حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات f

x	0	1	$+\infty$
f '	‖	+	
f	‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

Dreamjob.ma

- إنشاء منحنى الدالة: f في م. م. م $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$



❖ **نتائج:**

- الدالة $f\left(x\right)=\ell n\left(x\right)$ متصلة و تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$
- f تقابل من $\left]0,+\infty\right[$ إلى $\left]-\infty,+\infty\right[$ $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,+\infty\right[$
- المعادلة $f(x)=1$ (أي $\ell n\left(x\right)=1$) تقبل حلا وحيدا على $\left]0,+\infty\right[$ ونرمز لهذا الحل ب: e مع $\left(e\simeq 2,718\right)$
- $\forall r\in\mathbb{Q}:r=\ell n\left(e^{r}\right)$.

مثال: $3=\ell n\left(e^{3}\right)$ و $-\dfrac{2}{7}=\ell n\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$

❖ **تطبيق:** حدد مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\dfrac{1}{3-\ell n\left(x\right)}$

06. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ **تعريف و خاصية:**

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I $\forall x\in I:u(x)\neq 0$.

- الدالة $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.
- الدالة: $f(x)=\ell n\left|u(x)\right|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي: $f'(x)=\left[\ell n\left|u(x)\right|\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (أي المشتقة اللوغاريتمية ل u على I).

❖ **برهان:**

لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن u متصلة على I

بمأن : $\forall x\in I:u(x)\neq 0$ إذن $u(x)<0$ و إما $u(x)>0$.

- حالة : $u(x)>0$ ومنه : $f(x)=\ell n\left|u(x)\right|=\ell n\left(u(x)\right)$

Dreamjob.ma

- ملحوظة:

- في حالة : $a=10$ الدالة : $f(x)=\log_{10}(x)$ تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار: $f(x)=\mathrm{Log}(x)$
- إذن: $\log_{10}=\mathrm{Log}$ ومنه : $\mathrm{Log}(1)=0$; $\mathrm{Log}(10)=1$; $\mathrm{Log}(10^r)=r$

- نتائج:

- $\log_a(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$ و $\log_a(1)=\frac{\ell n(1)}{\ell n(a)}=0$
- $\log_a(a)=\frac{\ell n(a)}{\ell n(a)}=1$
- $\log_a(e)=\frac{\ell n(e)}{\ell n(a)}=\frac{1}{\ell n(a)}$

- ملحوظة:

$\log_e(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(e)}=\ell n(x)$ إذن $\log_e=\ell n$

- خاصيات:

لكل x y من $]0,+\infty[$ و $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\log_a(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\times\log_a(x)$ و $\log_a(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3}\times\log_a(x)$

- نبرهن على: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

لدينا: $\log_a(x\times y)=\frac{\ell n(x\times y)}{\ell n(a)}=\frac{\ell n(x)+\ell n(y)}{\ell n(a)}=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}+\frac{\ell n(y)}{\ell n(a)}=\log_a(x)+\log_a(y)$

إذن: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

Dreamjob.ma

I. تقديم الدالة $f(x) = \ell n(x)$ (اللوغاريتم النبيري):

01. تقديم الدالة اللوغاريتم النبيري :

❖ نشاط :

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب : $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{1}{x}$$

1) هل f تقبل دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ؟ علل جوابك

2) كم توجد من دالة أصلية F ل f حيث $F(1) = 0$ ؟

❖ مفردات:

الدالة الأصلية F للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ حيث $F(1) = 0$

- نرمز لها ب $F(x) = \ell n(x)$
- الدالة F تسمى الدالة اللوغاريتمي النبيري

❖ تعريف :

الدالة الأصلية F للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 (أي $F(1) = 0$) تسمى الدالة اللوغاريتم النبيري و يرمز لها ب $F(x) = \ell n(x)$

❖ ملحوظة:

بدلا من كتابة: $F(x) = \ell n(x)$ نكتب: $f(x) = \ell n(x)$

❖ نتائج:

- الدالة $f(x) = \ell n(x)$ مجموعة تعريفها هي $D_f =]0,+\infty[$
- $f(1) = \ell n(1) = 0$
- الدالة $f(x) = \ell n(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = [\ell n(x)]' = \frac{1}{x} > 0$
- إذن الدالة $f(x) = \ell n(x)$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall a,b \in]0,+\infty[, a < b \Leftrightarrow \ell n(a) < \ell n(b)$.
- $\forall a,b \in]0,+\infty[, a = b \Leftrightarrow \ell n(a) = \ell n(b)$.

01. إشارة $\ell n(x)$ هي كما يلي:

Dreamjob.ma

بمأن $u(x) > 0$ إذن $u(I) \subset]0,+\infty[$ ومنه الدالة $x \to \ell n(x)$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$

ومنه :
$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{u} u(I) \xrightarrow{\ell n} \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow u(x) \longrightarrow \ell n(u(x)) = \ell n \circ u(x) \end{aligned}$$

إذن: f قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x) = [\ell n|u(x)|]' = [\ell n(u(x))]'$$
$$= [\ell n \circ u(x)]' = u'(x) \times \ell n' \circ u(x)$$
$$= u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- حالة : $u(x) < 0$ ومنه : (بنفس الطريقة نبرهن على ذلك)

❖ مثال :

نحسب : f' مع $f(x) = [\ell n|x^2 - x|]$

لدينا: $f'(x) = [\ell n|x^2 - x|]' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$

❖ مثال:

لنعتبر الدالة : $u(x) = 3x^2 - 5x$

أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u.

الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u هي الدالة: $x \to \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x}$

❖ استنتاج

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I حيث $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

الدوال الأصلية للدالة: $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال التي على شكل $F(x) = \ell n|u(x)| + c$ مع $(c \in \mathbb{R})$.

❖ مثال:

- أوجد الدوال الأصلية للدالة: $f(x) = \frac{5}{x - 2}$ على $]2,+\infty[$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a مع: $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

❖ تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (a عدد موجب قطعا و $a \neq 1$)

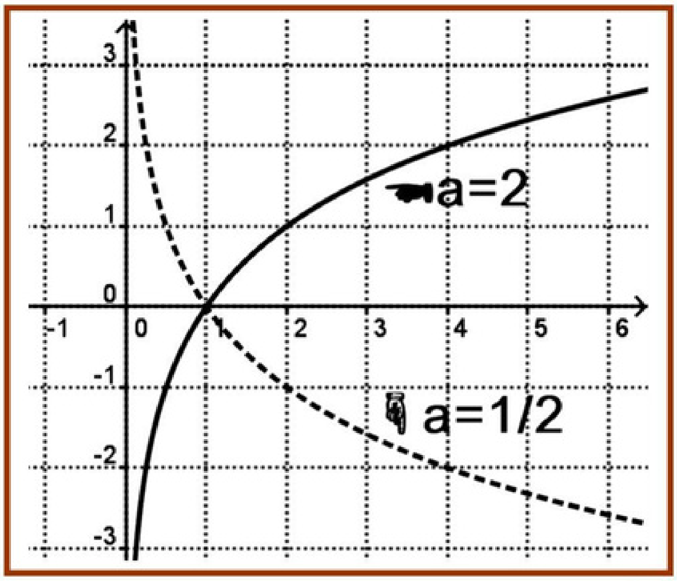
الدالة المعرفة كما يلي:

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$$

تسمى الدالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها ب $\log_a$.

Dreamjob.ma

- التمثيل المبياني ل $f(x)=\log_a(x)$. نأخذ: = $a=\frac{1}{2}2$



❖ **أمثلة:**

بسط التعابير التالية:

1) $\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$.

2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$.

3) $\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$.

4) بين أن: $\forall a,b\in]1,+\infty[\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$.

6) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$

7) أدرس الدالة : $f(x)=\log_5(x+1)$

Dreamjob.ma