الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم/6	مادة الرياضيات	أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 6 في درس الدوال اللوغاريتمية

محتوى البرنامج
- دالة اللوغاريتم النبيري.
  - تعريف وخصائص جبرية
  - الرمز :Ln و دراسة دالة اللوغاريتم النبيري.
  - نهايات اعتيادية
  - المشتقة اللوغاريتمية
- دالة اللوغاريتم للأساس a.
  - تعريف وخصائص جبرية
  - دالة اللوغاريتم العشري

القدرات المنتظرة
- التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات
- التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات لوغاريتمية
- معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري(خاصة في حل معادلات من نوع : $10^x = a$)
- التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتوظيفها
- التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغتها على دالة اللوغاريتم

I. دالة اللوغاريتم النبيري

الدالة $x \to \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$,إذن تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$, و تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1

تعريف: دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة. $x \to \frac{1}{x}$ على المجال. $]0;+\infty[$ و التي تنعدم في 1, و نرمز لها بالرمز ln.

نتائج
- مجموعة تعريف الدالة ln هي. $]0;+\infty[$.
- $ln1 = 0$
- الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال. $]0;+\infty[$ و $(ln')(x) = \frac{1}{x}$
- الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$
- لكل a و b من $]0;+\infty[$, $a < b \Leftrightarrow lna < lnb$.
- **إشارة الدالة Ln**

$lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$ و $lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$ و $lnx < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

مثال 1:
حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$f : x \to ln(x+1)$ (1 $g : x \to ln(x^2 - 3x + 2)$ (2 $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ (3

أجوبة: (1 $f(x) = ln(x+1)$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0\}$

$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ ومنه $D_f =]-1, +\infty[$

(2 $g(x) = ln(x^2 - 3x + 2)$

يعني $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$

$x^2 - 3x + 2$ نبحث عن الجذور

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{3+1}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$ و $x_1 = \frac{3-1}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x2-3x+2$		+	0	−	0	+	

ومنه : $D_g =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

(3 $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ يعني $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 et \ln x \neq 0\}$

$\ln x = 0$ يعني $\ln x = \ln 1$ يعني $x = 1$ ومنه : $D_h =]0;1[\cup]1;+\infty[$

خاصية: لكل a و b من $]0;+\infty[$ لدينا. $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$

لكل a و b من $]0;+\infty[$ لدينا. $lna > lnb \Leftrightarrow a > b$

أمثلة: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

(1 $ln(x-2) = 0$ (2 $ln(3x-1) = ln(5x-10)$

(3 $ln(x-1) \geq 0$

أجوبة : (1 $ln(x-1) = 0$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x - 2 > 0$

يعني إذا كان: $x > 2$ اذن : $D_E =]2;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$ln(x-2) = 0$ يعني $ln(x-2) = ln(1)$

يعني $x-2=1$ يعني $x=3\in D_E$ ومنه $S=\{3\}$

$ln(3x-1)=ln(5x-10)$ (2

المرحلة 1.هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $5x-10>0$ و $3x-1>0$

يعني إذا كان: $x>2$ و $x>\frac{1}{3}$ اذن : $D_E=]2;+\infty[$

المرحلة 2.حل المعادلة:

$ln(3x-1)=ln(5x-10)$ يعني $3x-1=5x-10$

يعني $-2x=-9$ يعني $x=\frac{9}{2}\in D_E$ ومنه $S=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

$ln(2x-6)\geq 0$ (3

المرحلة 1:هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-6>0$

يعني إذا كان: $x>3$ اذن : $D_E=]3;+\infty[$

المرحلة 2.حل المتراجحة:

$ln(2x-6)\geq 0$ يعني $ln(2x-6)\geq \ln 1$

يعني $2x-6\geq 1$ يعني $x\geq \frac{7}{2}$ يعني $x\in\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

ومنه $S=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[\cap]3;+\infty[$ يعني $S=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

تمرين1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0$ (1 $\quad$ $ln(2x)=ln(x^2+1)$ (2

الجواب:

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0$ (1 .

المرحلة 1.هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1>0$ و $1-x>0$

يعني إذا كان: $x>\frac{1}{2}$ و $x<1$ اذن : $D_E=\left]\frac{1}{2};1\right[$

المرحلة 2.حل المعادلة:

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0$ يعني $ln(2x-1)=ln(1-x)$

يعني $2x-1=1-x$ يعني $3x=2$ يعني $x=\frac{2}{3}\in D_E$ ومنه $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$ln(2x)=ln(x^2+1)$ (2

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x>0$ و $x^2+1>0$ يعني إذا كان: $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

ليكن x من $]0;+\infty[$: $In(2x)=In(x^2+1)\Leftrightarrow 2x=x^2+1$.

$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1\in D_E$

إذن مجموعة حلول المعادلة. (E) هي: $S=\{1\}$

تمرين2 : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$.

الجواب: ***المرحلة 1***.هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$x-1>0$ و $3x+1>0$ أي $\left(x>-\frac{1}{3};x>1\right)$ يعني $x>1$

المرحلة 2.حل المعادلة:

المرحلة 2.حل المتراجحة: ليكن x من $]1;+\infty[$

$ln(x-1)-ln(3x+1)<0\Leftrightarrow ln(x-1)<ln(3x+1)$

$x-1<3x+1\Leftrightarrow 2x>-2\Leftrightarrow x>-1$

إذن: $S=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[$ أي $S=]1;+\infty[$.

خاصيات جبرية

- a و b من $]0;+\infty[$. لدينا: $ln(ab)=lna+lnb$
- **خاصية:** لكل a و b من $]0;+\infty[$ و لكل r من $\mathbb{Q}$, لدينا:

$ln\left(\frac{1}{a}\right)=-lna$ و $ln\left(\frac{a}{b}\right)=lna-lnb$ و $ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}lna$ و

$ln(a^r)=rlna$

أمثلة : إذا علمت أن $ln(2)\simeq 0,7$ و $ln(3)\simeq 1,1$

فاحسب ما يلي: $ln(6)$, $ln(4)$, $ln(8)$, $ln(72)$

$ln\left(\frac{1}{2}\right)$, $ln\left(\frac{3}{2}\right)$, $ln(\sqrt{2})$, $ln(\sqrt{6})$, $ln(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$, $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}$

$C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2015}$

الحل

$ln(6)=ln(2\times 3)=ln(2)+ln(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$

$ln(4)=ln(2\times 2)=ln(2^2)=2ln(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$

$ln(8)=ln(2\times 2\times 2)=ln(2^3)=3ln(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$

$ln(72)=ln(3^2\times 2^3)=ln(3^2)+ln(2^3)=2ln(3)+3ln(2)$

$ln(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$

و $ln\left(\frac{3}{2}\right)=ln(3)-ln(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$

$ln\left(\frac{1}{2}\right)=-ln(2)\simeq -0,7$

$ln(\sqrt{6})=\frac{1}{2}ln(6)\simeq\frac{1}{2}\times 1,8\simeq 0,9$

$\ln(3\sqrt{2})=\ln(3)+\ln(\sqrt{2})\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$

$ln(12\sqrt[3]{3})=ln(3\times 2^2)+ln(\sqrt[3]{3})=ln(3)+2ln(2)+ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)=ln(3)+2ln(2)+\frac{1}{3}ln(3)$

$ln(12\sqrt[3]{3})\simeq 1,1+1,4+\frac{1}{3}\times 1,1\simeq 2,86$

$A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=ln\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)=ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$

$A=ln\left(\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}\right)=ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}ln2\simeq 0,35$

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}=\frac{1}{4}ln3^4+\frac{1}{2}ln3-ln\frac{1}{3^3}=\frac{4}{4}ln3+\frac{1}{2}ln3+3ln3$

$B\simeq 1,1+\frac{1,1}{2}+3\times 1,1\simeq 4,95$

$C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2015}=ln\left((\sqrt{2}+1)^{2015}\times(\sqrt{2}-1)^{2015}\right)$

$C=ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^{2015}=ln\left((\sqrt{2})^2-1^2\right)^{2015}=2015ln(1)=2015\times 0=0$

تمرين3 : بسط

$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$ (1 $\quad$ $B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln(10^6)$ (2

الجواب: 1) $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)=\ln(3)-\ln(5)+\ln(3\times 5)$

$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln 3+\ln 5=2\ln(3)=\ln(3^2)=\ln(9)$

$$B=\ln(10^{-2})-\ln(10^{3})+\ln(10^{6})=-2\ln(10)-3\ln(10)+6\ln(10)$$

$$B=\ln(10)=\ln(2\times5)=\ln2+\ln5$$

تمرين4 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التالية:

1) $\ln x+\ln(x-1)-\ln2=\ln3$ 2) $\ln(2x+5)+\ln(x+1)\leq \ln4$.

الأجوبة: 1) $\ln x+\ln(x-1)-\ln2=\ln3$ يعني $\ln x+\ln(x-1)=\ln2+\ln3$

يعني $\ln x+\ln(x-1)=\ln2+\ln3$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$ و

$x-1>0$ يعني إذا كان: $x>0$ و $x>1$ اذن : $D_E=]1;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$\ln x+\ln(x-1)=\ln2+\ln3$ يعني $\ln(x(x-1))=\ln6$

يعني $x(x-1)=6$ يعني $x^2-x-6=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+24=25>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1}$ و $x_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1}$

$x_1=3$ و $x_2=-2$ وبما أن : $x_2=-2\notin]1;+\infty[$ فان : $S=\{3\}$

2) $\ln(2x-5)+\ln(x+1)\leq \ln4$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$x+1>0$ و $2x-5>0$ أي $\left(x>-1 \text{ و } x>\dfrac{5}{2}\right)$ يعني $x>\dfrac{5}{2}$

ومنه : $D_I=\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

$$\ln((2x-5)(x+1))\leq \ln4 \Leftrightarrow \ln(2x-5)+\ln(x+1)\leq \ln4$$

$$2x^2-3x-9\leq0 \Leftrightarrow (2x-5)(x+1)\leq4 \Leftrightarrow$$

$$\Delta=b^2-4ac=9-4\times2\times(-9)=9+72=81>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{3+9}{2\times2}$ و $x_2=\dfrac{3-9}{2\times2}$ يعني $x_1=3$ و $x_2=-\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$2x^2-3x-9$		+	0	−	0	+	

إذن: $S=\left[-\dfrac{3}{2};3\right]\cap\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[=\left]\dfrac{5}{2};3\right]$

II. دراسة الدالة $\ln$

1. نهايات اعتيادية

خاصية 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ **خاصية 2:** $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

برهان على الخاصية 2: نضع : $X=\dfrac{1}{x}$

$$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to0^+$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln x=\lim_{X\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{X\to+\infty}-\ln X=-\lim_{X\to+\infty}\ln X=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

خاصية 3: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

أمثلة : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)+1}{\ln x}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^2(x)-\ln x\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln x$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln^2(x)+\ln x$

الجواب: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)+1}{\ln x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{-\infty}=0^-$ لأن : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\ln^2(x)-\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln^2(x)-\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln x(\ln(x)-1)=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln^2(x)+\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x(\ln(x)+1)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)+1=-\infty$

2. جدول تغيرات الدالة $x\to\ln(x)$:

لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

بما أن $x>0$ فان $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$

و بالتالي الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

نتائج: $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$.

المعادلة $\ln(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ نرمز لهذا الحل بالرمز e ولكل عدد جذري k لدينا: $\ln(e^k)=k$.

العدد : e : $e\simeq2,71828\cdots$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.

أمثلة: 1) $7=\ln(e^7)$ و $\ln(e^3)=3$

2) حل المعادلة $\ln(x)=7$ يعني $\ln(x)=7\ln(e)$ يعني $x=e^7$

$S=\{e^7\}$

تمرين5 : أحسب وبسط :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ $B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\dfrac{1}{3}\ln(e^9)$

الجواب: 1) $A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$$A=2\times1+4\times1--1=7$$

$$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln(\sqrt{e})-\frac{1}{3}9\ln(e)$$

$$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

تمرين6 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(2x-1)=\dfrac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

الجواب: (1 $ln(2x-1)=\frac{3}{2}$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1>0$

يعني $x>\frac{1}{2}$ اذن : $D_E=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$ln(2x-1)=\frac{3}{2}$ يعني $ln(2x-1)=\frac{3}{2}ln(e)$ يعني $ln(2x-1)=ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

يعني $2x-1=e^{\frac{3}{2}}$ يعني $2x-1=(\sqrt{e})^3$ يعني $x=\frac{(\sqrt{e})^3+1}{2}\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$S=\left\{\frac{(\sqrt{e})^3+1}{2}\right\}$

(2 $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$

نضع : $\ln x = X$ والمعادلة تصبح : $2X^2+X-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+48=49>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{-1+7}{2\times4}$ و $X_2=\frac{-1-\sqrt{49}}{2\times2}$ يعني $X_1=\frac{3}{2}$ و $X_2=-2$

يعني $\ln x_1=\frac{3}{2}$ و $\ln x_2=-2$ يعني $x_1=e^{\frac{3}{2}}$ و $x_2=e^{-2}$

يعني $x_1=(\sqrt{e})^3=e\sqrt{e}$ و $x_2=\frac{1}{e^2}$ ومنه : $S=\left\{e\sqrt{e},\frac{1}{e^2}\right\}$

تمرين7 : حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

الجواب: $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\to 1\\2\ln x-\ln y=3\to 2\end{cases}$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$5\ln x=5$ يعني $\ln x=1$ يعني $\ln x=\ln e$ يعني $x=e$

نعوض $x=e$ في المعادلة الأولى فنجد : $3\ln e+\ln y=2$

يعني $\ln y=2-3$ يعني $\ln y=-1$ يعني $y=e^{-1}$ يعني $y=\frac{1}{e}$

$S=\left\{\left(e;\frac{1}{e}\right)\right\}$

3. نهايات اعتيادية أخرى

خاصية: $\lim_{x\to0^+} xlnx=0^-$ و $\lim_{x\to1}\frac{lnx}{x-1}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{ln(x+1)}{x}=1$.

$\lim_{x\to0^+}x^n lnx=0$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^n}=0$ حيث.

$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

مثال: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$ و $\lim_{x\to0^+}x^4\log x$ و

$\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$

$\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ ضع : $X=\sqrt{x}$

أجوبة: (1: $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}+lnx=\lim_{x\to0^+}\frac{1+xlnx}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ لأن :

$\lim_{x\to0^+}xlnx=0$

(2 $\lim_{x\to0^+}x^4\log x=0$ حسب الخاصية : $\lim_{x\to0^+}x^n lnx=0$

(3 $\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x=0$ (4 $\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ نضع : $X=\frac{1}{x}$

$X\to0^+ \Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{0^+}\frac{1}{X}ln(1+X)==\lim_{0^+}\frac{ln(1+X)}{X}=1$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty$

(5 $\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ نضع : $X=\sqrt{x}$

$X^2=x\Leftrightarrow X^2=(\sqrt{x})^2\Leftrightarrow X=\sqrt{x}$

$X\to0^+\Leftrightarrow x\to0^+$

$\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2=\lim_{0^+}X^2(ln(X^2))^2=\lim_{0^+}X^2(2lnX)^2=\lim_{0^+}4X^2(lnX)^2$

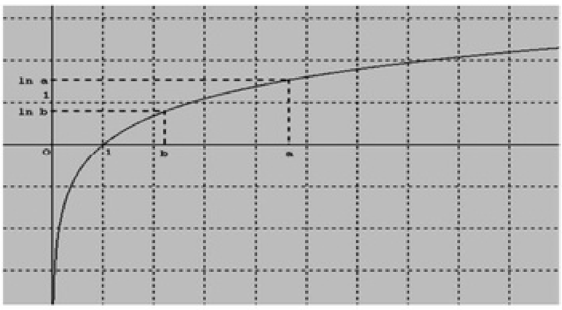
$\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2=4\lim_{0^+}(XlnX)^2=4\times0^2=0$ لأن: $\lim_{x\to0^+}xlnx=0^-$

4. الفروع اللانهائية

لدينا: اذن منحنى الدالة ln يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to0}lnx=-\infty$. ولدينا محور الأراتيب مقارب لمنحنى الدالة ln

5. انشاء منحنى الدالة.



III. المشتقة اللوغاريتمية لدالة

تعريف

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I $((\forall x\in I);u(x)\neq0)$.

الدالة: $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$ (حيث u' هي الدالة u) تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.

مثال لنحدد المشتقة اللوغاريتمية للدالة: $u:x\to3x^2+5$.

الدالة. $u:x\to3x^2+5$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على $\mathbb{R}$

لدينا:. $(\forall x\in\mathbb{R});u'(x)=6x$ إذن المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على $\mathbb{R}$ هي الدالة: $x\to\frac{6x}{3x^2+5}$.

خاصية1

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I فان الدالة $f:x\to In|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي المشتقة اللوغاريتمية للدالة u

يعني: $(\forall x\in I);f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال1 : أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=x^2-\ln x$ و $f(x)=x\ln x$ و $f(x)=\ln(1+x^2)$

الأجوبة : $f'(x)=(x^2-\ln x)'=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

$f'(x) = (x\ln x)' = x'\ln x + x\ln' x = 1\ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$

مثال2 :حدود الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1. $I=\mathbb{R}; f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$
2. $I=]0;1[; f(x)=\frac{1}{xlnx}$

الأجوبة :1) لدينا $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$

اذن : $F(x)=\frac{1}{4}\ln|x^4+2|+k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$

يعني : $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+k$ لأن : $x^4+2>0$

2) $f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}=\frac{(lnx)'}{lnx}$

اذن : $F(x)=\ln|\ln x|+k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$

تمرين8 : نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f و حدد عددين حقيقيين a و b بحيث: $(\forall x\in D); f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$
2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-2[$
3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\infty;-2[$ بحيث $F(-3)=\ln 2$

أجوبة : I. يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x-2\neq0\}$

x^2+x-2 نبحث عن الجذور

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ يعني $x_1=\frac{-1+3}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ و $x_2=\frac{-1-3}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$

$D_f=\mathbb{R}/\{-2;1\}$

$f(x)=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$ نجد أن :

$\begin{cases}a+b=5\\2a-b=1\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد : $3a=6$ يعني

$a=2$

وبتعويض a بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أن : $2+b=5$ يعني

$b=3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f هي :

$(\forall x\in D_f); f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

2) $(\forall x\in D_f); f(x)=2\frac{(x-1)'}{x-1}+3\frac{(x+2)'}{x+2}$

ومنه : $F(x)=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

وبما أن : $x\in]-\infty;-2[$ يعني $x<-2$ اذن $x<1$:

ومنه : $x+2<0$ و $x-1<0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:

$F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

3) $F(-3)=\ln 2$ يعني $2\ln(4)+3\ln(1)+k=\ln 2$ يعني $k=\ln 2-2\ln(2^2)$

يعني $k=-3\ln 2$ ومنه : $F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)-3\ln 2$

IV. دراسة دالة تحتوى على ln

مثال:

I. لتكن الدالة العددية g بحيث: $g(x)=x-lnx$

1. حدد D_g و أحسب نهايات g عند محدات D_g
2. أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات g
3. استنتج أن: $x>lnx$, $\forall x>0$

II. لتكن الدالة العددية f بحيث : $\begin{cases}f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx}, & x\succ0\\ f(0)=-1\end{cases}$

1. بين أن $D_f=[0;+\infty[$
2. بين أن f متصلة في الصفر على اليمين
3. أحسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
4. بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين
5. بين أن : $f'(x)=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$, $\forall x\in]0;+\infty[$
6. أعط جدول تغيرات f
7. حدد نقط تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=1$
8. بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $]\frac{1}{2};1[$
9. أنشئ C_f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (خذ $e\approx2,7$, $ln2\approx0,7$)

I. **أجوبة :1)** $g(x)=x-lnx$ $D_g=]0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x-lnx=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}x-lnx=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to0^+}lnx=-\infty$

2) $g'(x)=(x-lnx)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

اشارة $g'(x)$ هي اشارة : $x-1$ لأن : $x\in]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) نلاحظ أن g تقبل قيمة دنيا عند : $x_0=1$

اذن : $\forall x\in]0;+\infty[$ $g(1)\le g(x)$ اذن : $1\le x-lnx$ $\forall x\in]0;+\infty[$

اذن : $\forall x\in]0;+\infty[$ $0<1\le x-lnx$ اذن : $lnx<x$ $\forall x\in]0;+\infty[$

1.II $\begin{cases}f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx}\\ f(0)=-1\end{cases}$ f دالة معرفة يعني $x-lnx\neq0$ و $x>0$

وحسب ماسبق وجدنا أن $0<x-lnx$ اذن : $x-lnx\neq0$

ولدينا 0 لديه صورة اذن : $D_f=[0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{lnx\left(\dfrac{x}{lnx}+1\right)}{lnx\left(\dfrac{x}{lnx}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x}{lnx}+1}{\dfrac{x}{lnx}-1}$

لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{lnx}=0^-$ و $\lim\limits_{x\to0^+} lnx=-\infty$ و $\dfrac{0}{\infty}=0$ اذن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1=f(0)$

ومنه f متصلة في الصفر على اليمين

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{lnx}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{lnx}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{lnx}{x}}{1-\dfrac{lnx}{x}}=1$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x}=0$ ومبيانيا : $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة f

4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x+lnx}{x-lnx}+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x+lnx+x-lnx}{x-lnx}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{x(x-lnx)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x-lnx}=0=f'_d(0)$

ومنه f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

5) $f(x)=\dfrac{x+lnx}{x-lnx}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+lnx}{x-lnx}\right)'=\frac{(x+lnx)'(x-lnx)-(x+lnx)(x-lnx)'}{(x-lnx)^2}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-lnx)-(x+lnx)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-lnx)^2}=\frac{x-lnx+1-\frac{lnx}{x}-x-lnx+1+\frac{lnx}{x}}{(x-lnx)^2}$$

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{2-2lnx}{(x-lnx)^2}=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$$

6) اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $1-lnx$

$e>x\Leftrightarrow \ln e>lnx\Leftrightarrow 1>lnx\Leftrightarrow 1-lnx>0$

ومنه جدول الاشارة والتغيرات :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

7) $f(x)=1$ يعني $\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=1$ يعني $x+lnx=x-lnx$

يعني $2lnx=0$ يعني $lnx=0$ يعني $x=1$

اذن نقطة تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=1$ هي $A(1;1)$

8) f دالة متصلة على المجال $D_f=[0;+\infty[$ ومنه متصلة على $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

و

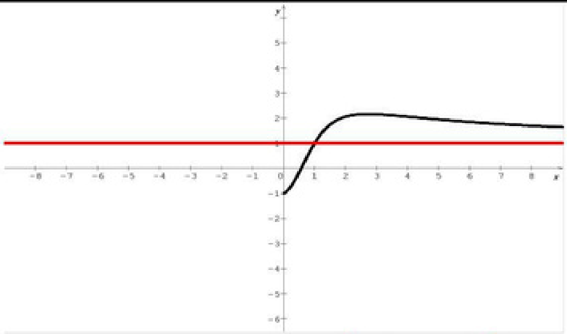
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-ln\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-ln2}{\frac{1}{2}+ln2}=\frac{\frac{1-2ln2}{2}}{\frac{1+2ln2}{2}}=\frac{1-2ln2}{1+2ln2}<0$$

$$f(1)=\frac{\frac{1}{2}+ln(1)}{\frac{1}{2}-ln(1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1>0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ حلا على الأقل على المجال $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

أي : C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

9)



V. دالة اللوغاريتم للأساس a ($a>0$ و $a\neq1$.)

تعريف: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز Log_a

و المعرفة على $]0;+\infty[$. بما يلي: $Log(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

نتائج: $Log_a 1=0\ ,Log_a e=\dfrac{1}{\ln a}\ ,\ Log_a(a)=1$

$\forall x\in]0;+\infty[;\log_e(x)=\ln x$ اذن $\ln=\log_e$

خاصية:

لكل x و y من $]0;+\infty[$, و لكل a من $\mathbb{R}^{*+}-\{1\}$. لدينا:

$\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)\ ,\ \log_a\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)\ ,\ \log_a(x^r)=r\log_a(x)$ لكل r من $\mathbb{Q}$

الدالتان $\ln$ و Log_a لهما نفس الخاصيات الجبرية.

البرهان : البرهان على الخاصية(1)

$$\log_a(xy)=\frac{\ln(xy)}{\ln(a)}=\frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)}=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}+\frac{\ln(y)}{\ln(a)}=\log_a(x)+\log_a(y)$$

(يمكن البرهان على الخاصيات الأخرى باستعمال الخاصيات الجبرية للدالة ln)

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم للأساس a

الحالة 1: $a>1$

x	0		$+\infty$
$loga'(x)$		$+$	
$loga(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الحالة 2: $0<a<1$

x	0		$+\infty$
$loga'(x)$		$-$	
$loga(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

أمثلة: أحسب وبسط ما يلي : 1) $\log_2 4$ 2) $\log_8 4$ 3) $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}$

4) $\log_{\sqrt{3}} 9$ 5) $A=\log_2\left(\dfrac{1}{5}\right)+\log_2(10)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

أجوبة : 1) $\log_2 4$ طريقة 1: $\log_2 4=\dfrac{\ln4}{\ln2}=\dfrac{\ln2^2}{\ln2}=\dfrac{2\ln2}{\ln2}=2$

طريقة 2: $\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2\times1=2$

2) $\log_8 4$: $\log_8 4=\frac{\ln 4}{\ln 8}=\frac{\ln 2^2}{\ln 2^3}=\frac{2\ln 2}{3\ln 2}=\frac{2}{3}$

3) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=-\log_{\sqrt{2}}2=-\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^2=-2\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=-2\times1=-2$

يمكن استعمال طريقة أخرى

4) $\log_{\sqrt{3}}9=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4=4\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=4\times1=4$

5) $A=\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)=-\log_2 5+\log_2(5\times2)+\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$

$A=-\log_2 5+\log_2 5+\log_2 2+\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}3=1+\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}3=1-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

<u>تمرين9</u> : أحسب ما يلي:

1) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)$ 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{2}\right)$

أجوبة : 1) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)=\log_2\left(\frac{1}{5}\times10\right)=\log_2(2)=1$

2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}(2)=-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}\times1=-\frac{1}{3}$

VI. دالة اللوغاريتم العشري

<u>تعريف:</u> دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة اللوغاريتمية للأساس 10

و تكتب $\log$ عوض $\log_{10}$: $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

<u>نتائج:</u> $\log(10)=1$, $\log(1)=0$, $(\forall r\in\mathbb{Q});\log(10^r)=r$.

دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و

$\forall x\in]0;+\infty[;(\log_a)'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

<u>مثال1</u> : $\log_{10}100$, $\log_{10}0,0001$

بسط ما يلي: $A=\log(250000)+\log\sqrt{250}-\log(125)$

<u>الجواب</u> : $\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2\times1=2$

$\log_{10}0,0001=\log_{10}10^{-4}=-4\log_{10}10=-4$

$A=\log(250000)+\log\sqrt{250}-\log(125)=\log(5^2\times10^4)+\frac{1}{2}\log(5^2\times10)-\log(5^3)$

$A=\log5^2+\log10^4+\frac{1}{2}(\log5^2+\log10)-3\log5=2\log5+4\log10+\frac{1}{2}(2\log5+1)-3\log5$

$A=2\log5+4+\log5+\frac{1}{2}-3\log5=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

<u>مثال2:</u> حل في $\mathbb{R}$ **المعادلات** التالية :

1. $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$
2. $2(\log x)^2-19\log x-10=0$ حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري

<u>أجوبة : 1)</u> المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$ و $2x>0$

يعني إذا كان: $x>0$ و $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة: $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$

يعني $\log_5(x)-1=0$ أو $\log_3(2x)=0$ يعني $\log_5(x)=\log_5(5)$ أو $\log_3(2x)=\log_3(1)$

يعني $x=5$ أو $2x=1$ يعني $x=5$ أو $x=\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2};5\right\}$

2) $2(\log x)^2-19\log x-10=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$ اذن : $D_E=]0;+\infty[$

<u>نضع</u> : $\log x=X$ والمعادلة تصبح : $2X^2-19X-10=0$

$\Delta=b^2-4ac=(19)^2-4\times2\times(-10)=361+80=441=(21)^2>0$

بما أن $\Delta>0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{19+21}{2\times2}=10$ و $X_2=\frac{19-21}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

يعني $\log x_1=10$ و $\log x_2=-\frac{1}{2}$

يعني $x_1=10^{10}$ و $x_2=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ومنه : $S=\left\{\frac{\sqrt{10}}{10},10^{10}\right\}$

<u>مثال2:</u> حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq1$

الجواب : المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$x-\frac{1}{2}>0$ يعني $x>\frac{1}{2}$ اذن : $D_I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq1$ يعني $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ يعني $x-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$

يعني $x\leq1$ ومنه : إذن: $S=]-\infty;1]\cap\left]\frac{1}{2};+\infty\right[=\left]\frac{1}{2};1\right]$

<u>تمارين للبحث</u>

<u>تمرين1:</u>

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=x(\ln x+1)^2$ إذا كانت $x\neq0$ و $f(0)=0$

1. حدد D_f
2. أحسب: و أحسب و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
3. أحسب $\lim_{x\to1^+}x(\ln x)^2$ ثم استنتج اتصال الدالة f على اليمين في 0
4. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
5. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة مبيانيا
6. تحقق أن $\forall x>0\ f'(x)=(\ln x+1)(\ln x+3)$
7. حدد جدول تغيرات الدالة f
8. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة الذي أفصولها 1

<u>تمرين2:</u>

1. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3-x)}{x}$
2. أحسب مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=x(\ln x)^4$

<u>تمرين3:</u> أحسب

1) $\log10^4+\log\frac{1}{10^4}$ 2) $\log2+\log5$ 3) $\log50-\log\frac{1}{2}$

4) $\log\sqrt{40}+\log\sqrt{90}-\log\frac{2}{3}$

<u>تمرين4:</u> حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $\log(x+3)+\log x=1$

1) $\log_4(x-1)+\log_4 2=1$ 2) $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=2$

3) $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$ 4) $(\log x)^2+\log x-6=0$

حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري

<u>تمرين5:</u> حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة بما يلي:

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ على المجال $]-\infty;1[$

تمارين محلولة أخرى :

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\le 0$

الجواب : تحديد D مجموعة تعريف المتراجحة :

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-3x+12}{2x+2}>0\right\}$$

$D=]-1;4[$ نعتبر : $x\in D$

$$\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\le0\Leftrightarrow\ln\frac{-3x+12}{2x+2}\le\ln1\Leftrightarrow\frac{-3x+12}{2x+2}\le1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-3x+12}{2x+2}-1\le0\Leftrightarrow\frac{-5x+10}{2x+2}\le0$$

إذن : $x\in]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[$

و منه : $S=]-1;4[\cap(]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[)$ إذن : $\boxed{S=[2;4[}$

تمرين3: احسب النهايات التالية :

-1 $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^3$ -2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}$ -3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$

أجوبة : -1 حساب : $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^3$

مباشرة : $0\times(-\infty)$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to0^+}x(\ln x)^3=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}^3\left(\ln\sqrt[3]{x}^3\right)^3$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(3\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$\lim_{x\to0^+}x(\ln x)^3=3^3\left(\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$$

حساب : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}$ نضع : $t=\sqrt[3]{x}$

إذا كان : $x\to0^+$ فإن : $t\to0^+$

و منه : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t$

و بما أن : $\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^3=3^3\left(\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^3=0}$

$$=3^3\times0^3$$

-2 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}$ مباشرة : $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\sqrt[10]{x}^{10}\right)^{10}}{\sqrt[10]{x}^{10}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=10^{10}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}$$

حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}$ نضع : $t=\sqrt[10]{x}$

إذا كان : $x\to+\infty$ فإن : $t\to+\infty$ و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$

و بما أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=10^{10}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}\right)^{10}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x}=0}$

$$=10^{10}\times0^{10}$$

-3 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$ مباشرة : $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$

حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$ نضع : $t=3x+1$

إذا كان : $x\to+\infty$ فإن : $t\to+\infty$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$

و بما أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}=0$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}=\frac{3}{2}\times0=0$

تمرين4: تحدد $f'(x)$ بحيث : $f(x)=\frac{\ln\left(3x^2+1\right)}{3x^2+1}$

الجواب : $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

$$f'(x)=\left(\frac{\ln\left(3x^2+1\right)}{3x^2+1}\right)'$$
$$=\frac{\left(3x^2+1\right)\ln'\left(3x^2+1\right)-\left(3x^2+1\right)'\ln\left(3x^2+1\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{6x}{3x^2+1}\left(3x^2+1\right)-6x\ln\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{6x-6x\ln\left(3x^2+1\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

إذن : $\boxed{f'(x)=\frac{6x\left(1-\ln\left(3x^2+1\right)\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}}$