تمرين رقم 1

نضع $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$ لكل z من $\mathbb{C}-\{-1\}$

1) أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy)=iy$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=z$ نرمز ب z_0 ; z_1 ; z_2 لحلول المعادلة حيث $z_0\in i\mathbb{R}$ و $\operatorname{Re}(z_1)>\operatorname{Re}(z_2)$

2) أ- تحقق أن $z_1+1=\left[1,\dfrac{11\pi}{6}\right]$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين z_1 ; z_2

3) نفترض في ما يلي أن $z=e^{i\alpha}$; $0\le\alpha<\pi$

أ- بين أن $\overline{f(z)}=izf(z)$

ب- حدد α علما أن $f(z)$ تخيلي صرف

ت- أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\theta}$ حيث $(r,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$

4) حدد z إذا علمت أن $|z|=1$ و $\operatorname{Re}(f(z))=\dfrac{1}{2}$

تمرين رقم 2

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين i ; $-i$

1) أ- تحقق أن العدد $u=a+i$ حل للمعادلة $(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$

ب- حدد v الحل الثاني للمعادلة (E)

2) نفترض أن : $|a|=1$ أ- بين أن $\dfrac{u}{v}\in\mathbb{R}$

ب- تحقق أن $u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$

ج- استنتج أن $\arg(u)=\dfrac{1}{2}\arg(a)+\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

3) بين أن $|u|+|v|\ge 2$

تمرين رقم 3

ليكن θ من المجال $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ z^2+2\cos\theta(1+\cos\theta)z+(1+\cos\theta)^2=0$ و أكتب الحلين عل الشكل المثلثي

2) حدد على الشكل المثلثي z_1 ; z_2 الجذرين المربعين للعدد $a=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}(-\cos\theta+i\sin\theta)$

3) استنتج الشكل المثلثي ل z_3 ; z_4 الجذرين المربعين للعدد $\bar{a}$

4) نضع $s_n=z_1^n+z_2^n+z_3^n+z_4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين أن $s_{2p+1}=0$ و أن $s_{2p}=(-1)^p\,2^{p+2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{2p}\cos(p\theta)$

تمرين رقم 4

1) بين أن $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+2}\right)\ \arctan a-\arctan b=\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$

2) بين أن المتتالية $U_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{1}{k^2+k+1}$ متقاربة و حدد نهايتها