السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 :

$$z_1=3+3i=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_3=-\sqrt{3}-i=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\left[2\,;\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$z_4=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left[2\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_5=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}i=\frac{1}{7}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{7}\,;\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_6=-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)=\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi)=[1;\alpha+\pi]$$

$$z_7=\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

$$z_8=1-\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)=2\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)i=2\sin(\theta)(\sin(\theta)+i\cos(\theta))$$

$$z_8=2\sin(\theta)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\left[2\sin(\theta)\,;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

(لأن: $2\sin(\theta)>0 \Rightarrow \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

$$z_9=\cos(\alpha)+\cos(\beta)+i(\sin(\alpha)+\sin(\beta))=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2i\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$z_9=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=\left[2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

(لأن: $2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0 \Rightarrow 0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$)

- للتذكير،للحصول على الشكل المثلثي للعدد: $z=a+ib$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب: $z=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$
  حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ثم نبحث في جدول القيم الهامة عن الزاوية α التي تحقق: $\cos(\alpha)=\frac{a}{r}$ و $\sin(\alpha)=\frac{b}{r}$
- ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_1 و z_5)
- حالات خاصة: $a=[a,0]\,;\ -a=[a,\pi]\,;\ a\,i=\left[a,\frac{\pi}{2}\right];\ -a\,i=\left[a,-\frac{\pi}{2}\right]\qquad \forall a\in IR^{+*}$
- يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحينا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا :

$$z_3=-\sqrt{3}-i=-(\sqrt{3}+i)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=[-2\,;\pi]\times\left[1\,;\frac{\pi}{6}\right]=[-2\,;\pi]\times\left[2\times1\,;\pi+\frac{\pi}{6}\right]=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

تمرين 2 : $u=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1 $u^{2}=2+\sqrt{3}+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[4;\frac{\pi}{6}\right]$

2 **نضع** : $u=[r,\theta]$ **حيث** : $r\in IR^{*+}$ و $\theta\in\left]-\pi;\pi\right]$

إذن : $u^{2}=\left[r^{2},2\theta\right]$ **منه**: $\begin{cases}r^{2}=4\\ 2\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ **منه** : $\begin{cases}r=2\\ \theta\equiv\frac{\pi}{12}[\pi]\end{cases}$ **منه** : $\begin{cases}r=2\\ \theta\equiv\frac{\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z\end{cases}$

$$\begin{cases}\theta\in\left]-\pi;\pi\right]\\ \theta\equiv\frac{\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z\end{cases}\Rightarrow-\pi<\frac{\pi}{12}+k\pi\leq\pi\Rightarrow-1-\frac{1}{12}<k\leq1-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{-13}{12}<k\leq\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow\left(k=0\ \ ou\ \ k=-1\right)\Rightarrow\left(\theta=\frac{\pi}{12}\ \ ou\ \theta=\frac{13\pi}{12}\right)$$

بما أن : $r\cos(\theta)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $r\sin(\theta)=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **فإن** : $\cos(\theta)>0$ و $\sin(\theta)>0$

إذن : $\theta=\frac{\pi}{12}$ (**لأن**: $\frac{\pi}{2}<\frac{13\pi}{12}<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)<0$) ، **بالتالي**: $u=\left[2,\frac{\pi}{12}\right]$

تمرين 3 : $u=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، $v=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

1 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1;\frac{\pi}{6}\right]$ ، $v=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left[1;\frac{\pi}{4}\right]$

2 **لدينا** : $\left(\frac{u}{v}\right)^{12}=\left(\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}}\right)^{12}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}$ ، **وبما أن** : $\frac{u}{v}=\left[\frac{1}{1};\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$

فإن : $\left(\frac{u}{v}\right)^{12}=\left[1^{12};12\times\frac{-\pi}{12}\right]=[1;-\pi]=-1$ ، **بالتالي** : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}\ -1$

3 **لدينا** : $\left(\sqrt{3}+i\right)^{m}=2^{m}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{m}=2^{m}\left[1;\frac{\pi}{6}\right]^{m}=2^{m}\left[1;\frac{\pi}{6}m\right]=2^{m}\left(\cos\left(\frac{\pi m}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi m}{6}\right)\right)$ ، **إذن**:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{m}\in IR\Leftrightarrow Im\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^{m}\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi m}{6}\right)=0\Leftrightarrow\frac{\pi m}{6}=k\pi\ /k\in Z\Leftrightarrow m=6k/k\in Z$$

4 **لدينا لكل** $\forall n\in IN$:

$$\left(1+i\right)^{n}+\left(1-i\right)^{n}=2^{n}\left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-i}{2}\right)^{n}\right)=2^{n}\left(\left[1;\frac{\pi n}{4}\right]+\left[1;\frac{-\pi n}{4}\right]\right)$$

$$=2^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\cos\left(\frac{-\pi n}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi n}{4}\right)\right)$$

$$\left(1+i\right)^{n}+\left(1-i\right)^{n}=2^{n}\times2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)=2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

5 **لدينا** : $v=\left[1;\frac{\pi}{4}\right]$ **منه** : $v^{4}=[1;\pi]=-1$ ، **الآن بما أن** $v\neq1$ **فإن** :

$$S = 1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{2014} = 1\times\frac{1-v^{2015}}{1-v} = \frac{1-v^{2012}\times v^3}{1-v} = \frac{1-\left(v^4\right)^{503}\times v^3}{1-v}$$

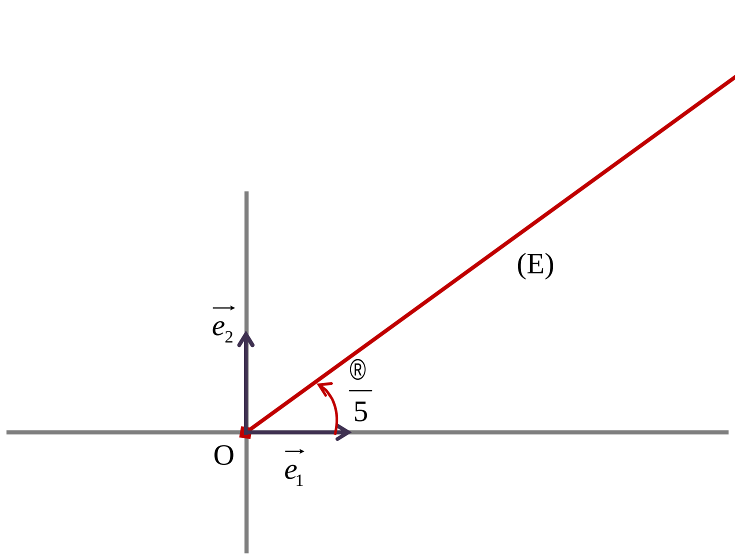
$$S = \frac{1-(-1)^{503}\times v^3}{1-v} = \frac{1+v^3}{1-v} = \frac{v+v^4}{v(1-v)} = \frac{v-1}{v(1-v)} = \frac{-1}{v} = \frac{[1\,;®]}{\left[1\,;\frac{®}{4}\right]} = \left[1\,;\frac{3®}{4}\right] = \frac{-\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|S| = 1$$

تمرين 4 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

$$E = \left\{ M(z)\ /\ \arg(z)\equiv\frac{®}{5}\ [2®\ ] \right\} = \left\{ M(z)\ /\ \left(\vec{e_1},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{®}{5}\ [2®\ ] \right\}$$

إذن : E هي نصف المستقيم الذي أصله O (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{®}{5}$

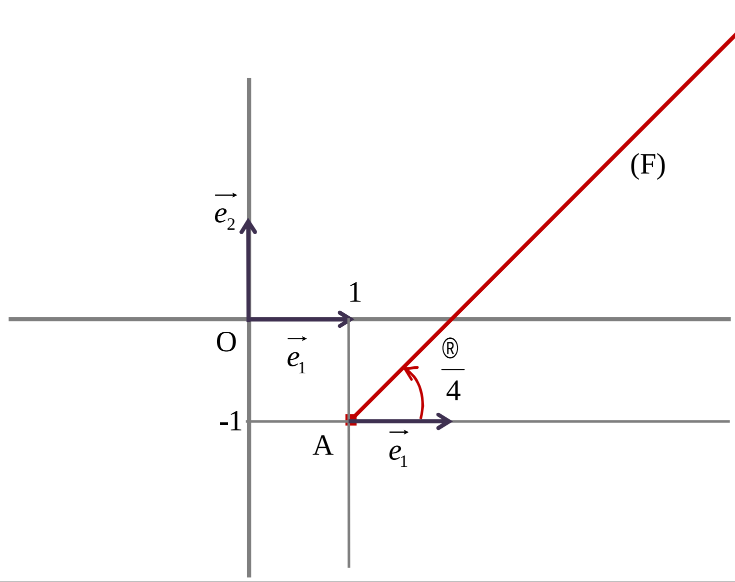


$$F = \left\{ M(z)\ /\ \arg(z-1+\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{4}\ [2®\ ] \right\} = \left\{ M(z)\ /\ \arg(z-(1-\boldsymbol{i}))\equiv\frac{®}{4}\ [2®\ ] \right\}$$

نعتبر النقطة : $A(1-\boldsymbol{i})$ ، إذن:

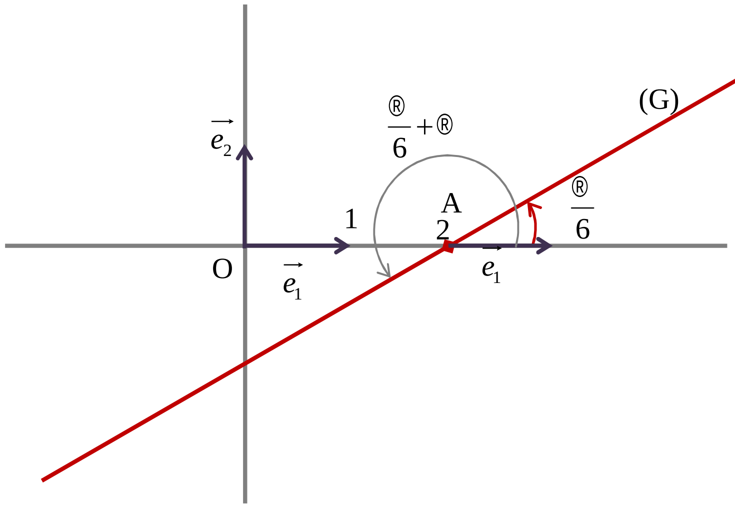
$$F = \left\{ M(z)\ /\ \left(\vec{e_1},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{®}{4}\ [2®\ ] \right\}$$

إذن : F هي نصف المستقيم الذي أصله A (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{®}{4}$



$$G=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\boldsymbol{i})^2\equiv\frac{®}{3}\ [2®\ ]\right\}=\left\{M(z)\ /\ 2\ \arg(z-2\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{3}\ [2®\ ]\right\}=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{6}\ [®\ ]\right\}$$

إذن باعتبار النقطة $A(2\boldsymbol{i})$ ، فإننا نستنتج أن G هي المستقيم المار من A (والمحروم منها) و الذي يـكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{®}{6}$



<u>تمرين 5</u> : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، $\boldsymbol{j}=\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 $\boldsymbol{j}=\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{2®}{3}\right]$ ، $\bar{\boldsymbol{j}}=\frac{-1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{4®}{3}\right]$

2 $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث a و b و c أعداد عقدية معلومة

المثلث ABC متساوي الأضلاع يعني : $AC=BC$ و $A\hat{C}B=\frac{®}{3}$

يعني : $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{®}{3}[2®]$ أو $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{®}{3}[2®]$ أو $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-®=\frac{®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-®=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{4®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{2®}{3}[2®]$

يعني : $\frac{c-b}{a-c}=\boldsymbol{j}$ أو $\frac{c-b}{a-c}=\bar{\boldsymbol{j}}$ ، يعني : $c-b=\boldsymbol{j}\ (a-c)$ أو $c-b=\bar{\boldsymbol{j}}\ (a-c)$

للتذكير ،يـكون مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت إحدى العبارات التالية صحيحة :

1) جميع أضلاعه متقايسة 2) جميع زواياه متقايسة 3) يوجد ضلعان متقايسان و الزاوية المحصورة بينهما قياسها °60

$\arg(-z)=\arg(-1\times z)=\arg(-1)+\arg(z)=®+\arg(z)$

$\arg(-z)=\arg\left(\frac{z}{-1}\right)=\arg(z)-\arg(-1)=\arg(z)-®$

نعتبر في المستوى العقدي: $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $E(e)$ و $F(f)$ و $G(g)$ حيث a و b و c و e و f و g أعداد عقدية.

لدينا E مماثلة A بالنسبة لـ B إذن: A منتصف $[BE]$ منه: $a=\frac{e+b}{2}$ منه: $e=2a-b$

لدينا F مماثلة B بالنسبة لـ C إذن: B منتصف $[CF]$ منه: $b=\frac{f+c}{2}$ منه: $f=2b-c$

لدينا G مماثلة C بالنسبة لـ A إذن: C منتصف $[AG]$ منه: $c=\frac{g+a}{2}$ منه: $g=2c-a$

3

بما أن ABC مثلث متساوي الأضلاع فإن: $c-b=\boldsymbol{j}(a-c)$ أو $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}(a-c)$

- إذا كان: $c-b=\boldsymbol{j}(a-c)$ ، منه: $b=c-\boldsymbol{j}(a-c)=(1+\boldsymbol{j})c-\boldsymbol{j}a$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2\boldsymbol{j}(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2\boldsymbol{j}-1)}{3(a-c)+\boldsymbol{j}(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2\boldsymbol{j}-1)}{(a-c)(3+\boldsymbol{j})}=\frac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}$$

و حيث أن: $j^2+j+1=0$ (راجع التمرين 3 من السلسلة 1) فإن: $\boldsymbol{j}(3+\boldsymbol{j})=3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}^2=3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}-1=2\boldsymbol{j}-1$

إذن: $\frac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}=\boldsymbol{j}$ إذن: $\frac{g-f}{e-g}=\boldsymbol{j}$

- إذا كان: $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}(a-c)$ ، منه: $b=c-\boldsymbol{j}(a-c)=(1+\overline{\boldsymbol{j}})c-\overline{\boldsymbol{j}}a$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2\overline{\boldsymbol{j}}(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2\overline{\boldsymbol{j}}-1)}{3(a-c)+\overline{\boldsymbol{j}}(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2\overline{\boldsymbol{j}}-1)}{(a-c)(3+\overline{\boldsymbol{j}})}=\overline{\left(\frac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}\right)}=\overline{\boldsymbol{j}}$$

في جميع الحالات نجد أن: $\frac{g-f}{e-g}=\boldsymbol{j}$ أو $\frac{g-f}{e-g}=\overline{\boldsymbol{j}}$ ، بالتالي EFG هو أيضا مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين رغم أنه يبدو صعبا لكنه مثال جيد لتوضيح أهمية الأعداد العقدية في حل كثير من المسائل الهندسية في أسطر قليلة، كما يوضح أهمية العدد $\boldsymbol{j}$ الذي أدرجنا بعض خواصه في تمرين سابق و التي من المستحسن حفظها و استعمالها عند الحاجة.