سلسلة 4	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

1

نضع : $¢ = a + b\boldsymbol{i}$ حيث $(a;b) \in IR^2$

لدينا : $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \\ ab = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 32 \\ ab = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2ab\boldsymbol{i} = -7 - 24\boldsymbol{i} \\ \left|¢\right|^2 = \left|\Delta\right|^2 \end{cases} \Leftrightarrow ¢^2 = \Delta$

$$¢^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

بالتالي جذرا Δ المربعين هما : $¢_1 = 3 - 4\boldsymbol{i}$ و $¢_2 = -3 + 4\boldsymbol{i}$

رغم أنه في غالب الأحيان يطلب فقط التحقق من الجذرين المربعين لكن الالمام بطريقة تحديد الجذرين أمر مهم و ينبغي التمكن منه رغم صعوبة الحسابات أحيانا.

2

لنحل في C المعادلة : $z^2 - (1 + 2\boldsymbol{i})z + (1 + 7\boldsymbol{i}) = 0$

لدينا : $\Delta = (1 + 2\boldsymbol{i})^2 - 4(1 + 7\boldsymbol{i}) = 1 + 4\boldsymbol{i} - 4 - 4 - 28\boldsymbol{i} = -7 - 24\boldsymbol{i} = (3 - 4\boldsymbol{i})^2$

إذن : $z_1 = \dfrac{1 + 2\boldsymbol{i} + 3 - 4\boldsymbol{i}}{2} = 2 - \boldsymbol{i}$ و $z_2 = \dfrac{1 + 2\boldsymbol{i} - 3 + 4\boldsymbol{i}}{2} = -1 + 3\boldsymbol{i}$

بالتالي : $S = \{2 - \boldsymbol{i} \; ; \; -1 + 3\boldsymbol{i}\}$

تمرين 2 :

لنحل في C المعادلة : $\boldsymbol{i}z^2 + \left(1 + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\right)z + \sqrt{3} = 0$

لدينا : $\Delta = \left(1 + \sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^2 - 4\sqrt{3}\boldsymbol{i} = 1 + 2\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 3 - 4\sqrt{3}\boldsymbol{i} = 1 - 2\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 3 = \left(1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^2$

إذن : $z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i} + 1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2\boldsymbol{i}} = \dfrac{-2\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2\boldsymbol{i}} = -\sqrt{3}$ و $z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 1 + \sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2\boldsymbol{i}} = \dfrac{-2}{2\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}$

بالتالي : $S = \left\{\boldsymbol{i} \; ; -\sqrt{3}\right\}$

لا داعي لتحديد الجذرين المربعين للمحددة لأننا نستطيع بسهولة التعرف على متطابقة هامة شبيهة بالتي نشرنا

تمرين 3 : $(E) : \; 2z^2 - 2(\sim + \boldsymbol{i})z + \sim^2 - 1 = 0$ ، $\sim \in]1;+\infty[$

1

لدينا :

$$\Delta = 4(\sim + \boldsymbol{i})^2 - 8(\sim^2 - 1) = 4(\sim^2 + 2\sim\boldsymbol{i} - 1) - 8\sim^2 + 8 = 4\sim^2 + 8\sim\boldsymbol{i} - 4 - 8\sim^2 + 8$$

$$\Delta = -4\sim^2 + 8\sim\boldsymbol{i} + 4 = -4(\sim^2 - 2\sim\boldsymbol{i} - 1) = (2\boldsymbol{i})^2(\sim - \boldsymbol{i})^2 = (2\sim\boldsymbol{i} + 2)^2$$

إذن : $z_1 = \dfrac{2(\sim + \boldsymbol{i}) - 2(\sim\boldsymbol{i} + 1)}{4} = \dfrac{\sim - 1}{2} - \dfrac{\sim - 1}{2}\boldsymbol{i}$ و $z_2 = \dfrac{2(\sim + \boldsymbol{i}) + 2(\sim\boldsymbol{i} + 1)}{4} = \dfrac{\sim + 1}{2} + \dfrac{\sim + 1}{2}\boldsymbol{i}$

بالتالي : $S = \left\{\dfrac{\sim - 1}{2} - \dfrac{\sim - 1}{2}\boldsymbol{i} \; ; \; \dfrac{\sim + 1}{2} + \dfrac{\sim + 1}{2}\boldsymbol{i}\right\}$

2

$$z_1 = \frac{\sim - 1}{2} - \frac{\sim - 1}{2}\boldsymbol{i} = \frac{\sim - 1}{2}(1 - \boldsymbol{i}) = \frac{\sim - 1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = \left[\frac{\sim - 1}{\sqrt{2}} \; ; \; \frac{-®}{4}\right]$$

$$z_2 = \frac{\sim + 1}{2} + \frac{\sim + 1}{2}\boldsymbol{i} = \frac{\sim + 1}{2}(1 + \boldsymbol{i}) = \frac{\sim + 1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = \left[\frac{\sim + 1}{\sqrt{2}} \; ; \; \frac{®}{4}\right]$$

(لأن : $\dfrac{\sim - 1}{\sqrt{2}} > 0$ و $\dfrac{\sim + 1}{\sqrt{2}} > 0$)

تمرين 4 : $P(z)=z^3+(1-3i)z^2-(2+3i)z-2$

1	ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=ai$ لدينا : $P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^3i-(1-3i)a^2-a(2+3i)i-2=0 \Leftrightarrow -a^3i-a^2+3a^2i-2ai+3a-2=0$ $P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^2+3a-2+(-a^3+3a^2-2a)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+3a-2=0\\-a^3+3a^2-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\-a(a^2-3a+2)=0\end{cases}$ $P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\a=0\end{cases} ou \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\a^2-3a+2=0\end{cases} \Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow a=1 \ ou \ a=2$ إذن الحدودية P تقبل جذرين تخيليين صرفين هما $z_0=i$ و $z_1=2i$	
	يمكننا ببساطة إجراء التكافؤات أعلاه في البحث أما الجواب فيكفي أن نحسب مثلا $P(i)$ و نجد 0 المطلوب أن نجد حلا تخيليا صرفا واحدا لكننا وجدنا اثنين ، في الجواب يمكن الاكتفاء بأحدهما، لكن هذه النتيجة ستكون مفيدة في السؤال الموالي	
2	بما أن كلا من $z_0=i$ و $z_1=2i$ جذر للحدودية P فإن هذه الأخيرة ستقبل القسمة على $z-i$ و $z-2i$ إذن توجد حدودية Q من الدرجة الأولى معاملاتها أعداد عقدية تحقق : $\begin{cases}P(z)=Q(z)(z-i)(z-2i)\\Q(z)=az+b \ /(a,b)\in C^*\times C\end{cases}$ $P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}P(0)=b\times(-i)\times(-2i)=-2b\\P(-i)=(-ai+b)\times(-2i)\times(-3i)=-6(-ai+b)\end{cases}$ لدينا : $P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}-2=-2b\\i-(1-3i)+(2+3i)i-2=6ai-6b\end{cases}$ $P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}b=1\\-6+6i=6ai-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\a=\frac{6i}{6i}=1\end{cases}$ بالتالي : $P(z)=(z+1)(z-i)(z-2i)$ بالتالي مجموعة حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي : $S=\{-1;\ i\ ;\ 2i\}$	
	الطريقة الاعتيادية لحل مثل هذا السؤال هي إجراء القسمة الإقليدية، لكننا آثرنا إدراج طريقة مختلفة قصد توسيع المعارف، اختيار العددين 0 و $-i$ جاء لتكون الحسابات أبسط ما يمكن كان يمكن تحديد العدد العقدي a بطريقة أبسط لكن هذه الطريقة تتطلب تعاريف لا تدرس حاليا في مستوى البكالوريا	

تمرين 5 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)=0$

1	ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=a$ و $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$ لدينا : $P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-2(2+3i)a^2-4(1-5i)a+16(1-i) \Leftrightarrow a^3-4a^2-6a^2i-4a+20ai+16-16i=0$ $P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-4a^2-4a+16+(-6a^2+20a-16)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^3-4a^2-4a+16=0\\-6a^2+20a-16=0\end{cases}$ $P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2(a-4)-4(a-4)=0\\3a^2-10a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)(a^2-4)=0\\3a^2-6a-4a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)(a-2)(a+2)=0\\3a(a-2)-4(a-2)=0\end{cases}$ $P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=4 \ ou \ a=2 \ ou \ a=-2\\a=2 \ \ ou \ \ a=\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a=2$	

إذن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا $z_0 = 2$.

2 لدينا :

$$
\begin{array}{l|l}
z^3-2(2+3\boldsymbol{i})z^2-4(1-5\boldsymbol{i})z+16(1-\boldsymbol{i}) & z-2 \\
\hline
\underline{z^3-2z^2} & z^2+(-2-6\boldsymbol{i})z+(-8+8\boldsymbol{i}) \\
0 \quad (-2-6\boldsymbol{i})z^2-4(1-5\boldsymbol{i})z & \\
\quad\ \underline{(-2-6\boldsymbol{i})z^2+(4+12\boldsymbol{i})z} & \\
\qquad\qquad 0 \quad (-8+8\boldsymbol{i})z+16(1-\boldsymbol{i}) & \\
\qquad\qquad\quad\ \underline{(-8+8\boldsymbol{i})z+16-16\boldsymbol{i}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

إذن $P(z)=(z-2)\left(z^2-2(1+3\boldsymbol{i})z-8+8\boldsymbol{i}\right)$ منه: $z^2-2(1+3\boldsymbol{i})z-8+8\boldsymbol{i}=0$ $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ ou

ولدينا : $\Delta = 4(1+3\boldsymbol{i})^2-4(-8+8\boldsymbol{i}) = 4(1+6\boldsymbol{i}-9+8-8\boldsymbol{i}) = 4(-2\boldsymbol{i}) = 4(1-\boldsymbol{i})^2$

إذن: $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2 \ ou \ z=\dfrac{2(1+3\boldsymbol{i})+2(1-\boldsymbol{i})}{2} \ ou \ z=\dfrac{2(1+3\boldsymbol{i})-2(1-\boldsymbol{i})}{2}$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=2 \ ou \ z=2+2\boldsymbol{i} \ ou \ z=4\boldsymbol{i}$

بالتالي : $S=\{2\,;\,2+2\boldsymbol{i}\,;\,4\boldsymbol{i}\}$

لاحظ أهمية المتساوية الهامة : $(1-\boldsymbol{i})^2=-2\boldsymbol{i}$ و $(1+\boldsymbol{i})^2=2\boldsymbol{i}$ لتفادي البحث عن الجذور المربعة كما في التمرين الأول

تمرين 6 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ a z^2-\boldsymbol{i}\left(a^4+1\right)z-a^3=0$ حيث $a\in\mathbf{C}^*$

1 لدينا : $\Delta=\left(\boldsymbol{i}\left(a^4+1\right)\right)^2+4a^4=-\left(a^8+2a^4+1\right)+4a^4=-\left(a^8-2a^4+1\right)=-\left(a^4-1\right)^2$

منه : $\Delta=0 \Leftrightarrow a^4=1 \Leftrightarrow \left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)=0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)(a-\boldsymbol{i})(a+\boldsymbol{i})=0 \Leftrightarrow a\in\{1;-1;\boldsymbol{i}\,;-\boldsymbol{i}\}$

وجب الاحتياط في هذا السؤال ففي المجموعة C وعكس المجموعة IR : $a^n=1$ لا تعني $a=1$ سواء كان الأس زوجيا أم فرديا، بل a يمثل جذرا نونيا للعدد 1، بمعنى هناك n قيمة للعدد a

2 أ) لدينا : $\Delta=\left(\boldsymbol{i}\left(a^4-1\right)\right)^2$

منه : $z_1=\dfrac{\boldsymbol{i}\left(a^4+1\right)+\boldsymbol{i}\left(a^4-1\right)}{2a}=\dfrac{2a^4\boldsymbol{i}}{2a}=a^3\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{\boldsymbol{i}\left(a^4+1\right)-\boldsymbol{i}\left(a^4-1\right)}{2a}=\dfrac{2\boldsymbol{i}}{2a}=\dfrac{\boldsymbol{i}}{a}$

بالتالي : $S=\left\{a^3\boldsymbol{i}\,;\dfrac{\boldsymbol{i}}{a}\right\}$

ب) لدينا $\boldsymbol{i}=\left[1;\dfrac{®}{2}\right]$ و $a=[r;¯]$ منه : $a^3=\left[r^3;3¯\right]$ منه : $z_1=\left[r^3;3¯+\dfrac{®}{2}\right]$ و $z_2=\left[\dfrac{1}{r};\dfrac{®}{2}-¯\right]$

3

$$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{i}\left(a^4+1\right)}{2a}=0 \Leftrightarrow a^4=-1 \Leftrightarrow a^4=\boldsymbol{i}^2 \Leftrightarrow \left(a^2=\boldsymbol{i}\right) ou \left(a^2=-\boldsymbol{i}\right)$$

$$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow \left(a^2=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{i})^2\right) ou \left(a^2=\frac{1}{2}(1-\boldsymbol{i})^2\right)$$

$$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow a\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\boldsymbol{i});\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+\boldsymbol{i});\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\boldsymbol{i})\,;\,\frac{-\sqrt{2}}{2}(1-\boldsymbol{i})\right\}$$

القيم المحصل عليها ثم الجذور من الدرجة الرابعة للعدد -1

مرة أخرى لاحظ أهمية : $(1-\boldsymbol{i})^2=-2\boldsymbol{i}$ و $(1+\boldsymbol{i})^2=2\boldsymbol{i}$