

الحسابيات

(1) تذكير:

قابلية القسمة في \mathbb{Z}

ليكن a و b من \mathbb{Z} نقول أن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k من \mathbb{Z} بحيث : $a = kb$

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad a/a \quad \diamond$$

$$(\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3) \quad \begin{cases} a/b \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a/c \quad \diamond$$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2) \quad \begin{cases} a/b \\ b/a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \quad \diamond$$

القسمة الأقليلية في \mathbb{Z}

ليكن a من \mathbb{Z} و b من \mathbb{N}^* يوجد زوج وحيد (q,r) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث : $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

(2) الموافقة بترديد n

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و a و b من \mathbb{Z}

نقول إن a يوافق b بترديد n إذا وفقط إذا كان $n/a - b$ و نكتب $a \equiv b [n]$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a [n] \quad \diamond$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b [n] \Rightarrow b \equiv a [n] \quad \diamond$$

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \quad \begin{cases} a \equiv b [n] \\ b \equiv c [n] \end{cases} \Rightarrow a \equiv c [n] \quad \diamond$$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و a من \mathbb{Z}

إذا كان r هو باقي قسمة a على n فإن $a \equiv r [n]$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و a و b من \mathbb{Z}

إذا كان r هو باقي قسمة a على n و r' هو باقي قسمة b على n

فإن : $a \equiv b [n] \Leftrightarrow r = r'$

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \quad \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d [n] \\ ac \equiv bd [n] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \quad a \equiv b [n] \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+c [n] \\ ac \equiv bc [n] \end{cases}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2; (\forall m \in \mathbb{N}) \quad a \equiv b [n] \Rightarrow a^m \equiv b^m [n]$$

مجموعة أصناف تكافؤ

ليكن $n \in \mathbb{N}$ وليكن $x \in \mathbb{Z}$

نسمي صنف تكافؤ x المجموعة التي نرمز لها بـ \bar{x} أو \dot{x} وهي معرفة بما يلي: $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv x [n]\}$

ليكن $n \in \mathbb{N}$ وليكن $x \in \mathbb{Z}$ و $y \in \mathbb{Z}$

$$\bar{x} = \{x + nk / k \in \mathbb{Z}\} \quad \triangleright$$

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y [n] \quad \triangleright$$

$$\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \not\equiv y [n] \quad \triangleright$$

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n-1}\} \quad \triangleright$$

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} \quad \triangleright$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \triangleright$$

(3) القاسم المشترك الأكبر

ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين غير منعدمين
❖ نرسم للقاسم المشترك الأكبر ل a و b : $\Delta(a,b)$ أو $\text{pgcd}(a,b)$ أو $a \wedge b$ و هو أكبر قاسم مشترك موجب
قطعا للعددين a و b

• ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
إذا كان $a \wedge b = d$ فإنه يوجد زوج (u,v) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $d = au + bv$

• ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $a \wedge b = d$

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \Leftrightarrow d' \mid d$$

• خوارزمية أقليدس

ليكن a و b من \mathbb{N}^*

إذا كان r هو باقي قسمة a على b ($\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$) فإن $a \wedge b = b \wedge r$

• ليكن a و b من \mathbb{N}^*
القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b هو آخر باقي غير منعدم في القسمة المتتالية

(4) المضاعف المشترك الأصغر:

ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين غير منعدمين
❖ نرسم للمضاعف المشترك الأصغر ل a و b : $M(a,b)$ أو $\text{ppcm}(a,b)$ أو $a \vee b$ و هو أصغر مضاعف
مشترك موجب للعددين a و b

• ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $m = a \vee b$

$$\begin{cases} a \mid m' \\ b \mid m' \end{cases} \Rightarrow m \mid m'$$

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$$

$$(ac \vee bc) = |c| \cdot (a \vee b)$$

5) الأعداد الأولية فيما بينها :

❖ ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
 $a \wedge b = 1$ إذا كان a و b أوليان فيما بينهما إذا فقط

مبرهنة بوزو (Bezout)

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
 $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2), au + bv = 1$

❖ ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$ac \wedge bc = |c|. (a \wedge b)$$

❖ ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $d \in \mathbb{N}^*$

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \begin{cases} d/a & ; & d/b \\ \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1 \end{cases}$$

❖ ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1 \quad \text{لدينا :}$$

مبرهنة كوص (Gauss)

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$\begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \Rightarrow ab/c$$

$$a \wedge b = 1$$

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} ax \equiv ay [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow x \equiv y [n]$$

(6) الأعداد الأولية :

❖ ليكن $p \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$

نقول أن p أولي إذا فقط إذا كان له أربع قواسم بالضبط : 1 و -1 و p و $-p$

ملاحظة :

• إذا كان p أولي فإن $-p$ أولي

• طريقة لتحديد الأعداد الأولية الموجبة :

ليكن $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

للتحقق هل n أولي :

▪ أولاً نحسب \sqrt{n}

▪ ثانياً نحدد جميع الأعداد الأولية الأصغر من \sqrt{n}

▪ إذا كان n لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد الأولية الأصغر من جذر مربعه فهو يكون أولياً
أما إذا قبل القسمة على أحدها فهو غير أولي

✓ ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z} و p عدد أولي

$$p / a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) : p / a_i$$

✓ ليكن p, p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

$$p / p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) : |p| = |p_i|$$