

التعداد تمارين و حلول

تمرين 1

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كما يلي أربعة كرات حمراء 3 منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم 2 و خمسة كرات خضراء 3 منها تحمل الرقم 2 ، واثنين منها تحمل الرقم 1، و كرة واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات.

1- حدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

2- حدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في \mathbb{R} مع العلم أن العدد a يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و b يمثل رقم الكرة الثانية و c يمثل الكرة الثالثة.

تمرين 2

من مؤسسة ثانوية ثانوية تأهيلية تحتوي على n شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من p شخصا حيث $2 \leq p \leq n$

1- ما هو عدد المجالس الممكن تكوينها في الحالات التالية:

- أ- مجلس يضم المدير و الناظر
- ب- مجلس لا يضم المدير و الناظر
- ت- مجلس يضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا

2- استنتج أن $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

تمرين 3

(1) بين بالترجع أن $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) استنتج قيمة المجموع $S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))$

تمرين 4

ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين

استنتج المجامع التالية $A = \sum_{k=1}^{k=n} k C_n^k$ $B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1) C_n^k$ $C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) C_n^k$

تمرين 5

نعتبر صندوقا يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات

تحمل الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 .

نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- أحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 3 كرات بيضاء و كرتين حمراويين.

2- أحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.

- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

تمرين 6

في مكتب جمعية يتكون من 15 عضوا ، 6 إناث و 9 ذكور .

نريد أن نختار عشوائيا رئيس و نائبه و كاتب عام و أمين المال.

1- ما هو عدد الإمكانيات الممكنة ؟

2- ما هو عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث؟

تمرين 7

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث $cardE = cardF = n$

- 1- بين أن عدد الأزواج $(X;Y)$ من $[P(E)]^2$ بحيث $X \cup Y = E$ و $n \geq 2$ هو 3^n
- 2- أحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر. و استنتج أن

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k \right)^2$$

$$\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k \left(C_n^k \right)^2 \quad \text{استنتج أن}$$

تمرين 8

أحسب المجاميع التالية

$$S_{(n;p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} \quad \text{و} \quad S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i \quad \text{و} \quad S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i$$

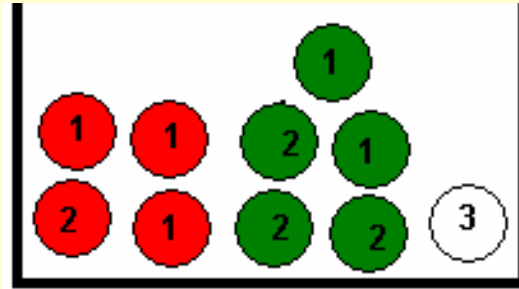
تمرين 9

لتكن E مجموعة منتهية حيث $\text{card}E = n \geq 2$

حدد عدد التطبيقات f المعرفة من E نحو E حيث $\text{card}[f(E)] = \frac{n}{2}$

حلول

حل تمرين 1



نسحب عشوائيا من الصندوق بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات.

1- نحدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

هذه السحبات ستكون على شكل $R_1 R_1 X$ أو $R_1 R_1 X$

عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1 هي:

$$A_7^1 \cdot A_3^1 \cdot A_8^1 + A_3^2 \cdot A_8^1 = 216$$

2- نحدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في \mathbb{R} مع العلم أن العدد a يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و b يمثل رقم الكرة الثانية و c يمثل الكرة الثالثة.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{تقبل حلين مختلفين في } \mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \quad \text{أي} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 > ac$$

إذا كان $b = 1$ فإن $\frac{1}{4} > ac$ وهذا غير ممكن لأن $a \geq 1$ و $c \geq 1$

إذا كان $b = 2$ فإن $1 > ac$ غير ممكن

إذا كان $b = 3$ فإن $\frac{9}{4} > ac$

ومنه $(a; b; c) = (1; 3; 1)$ أو $(a; b; c) = (1; 3; 2)$ أو $(a; b; c) = (2; 3; 1)$

إذن عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في \mathbb{R} هي:

$$A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 + A_4^1 \cdot A_1^1 \cdot A_5^1 + A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 = 60$$

حل تمرين 2

من مؤسسة ثانوية تأهيلية تحتوي على n شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من p شخصا

$$2 \leq p \leq n$$

-1

a. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر هو C_{n-2}^{p-2}

b. عدد المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر هو C_{n-2}^p

c. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا هو

$$C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} = 2C_{n-2}^{p-1}$$

-2 نستنتج أن $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

عدد المجالس المكونة من p شخص من بين n شخص هو C_n^p

لدينا المجالس المكونة من p شخص من بين n شخص هو مجموع المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر و المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر و ليس الاثنين معا.

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

حل تمرين 3

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$$

من أجل $n=1$ لدينا $C_{1+2}^3 = C_3^3 = 1$ و $\sum_{p=1}^{p=1} C_{p+1}^2 = C_2^2 = 1$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=1$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+3}^3 \quad \text{لنبين أن} \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+1+1}^2 + \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$$

(2) نستنتج قيمة المجموع $S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))$:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3$$

$$\frac{(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))}{2} = C_{n+2}^3 \quad \text{أي}$$

$$S = 2C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{إذن}$$

حل تمرين 4

ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k \quad B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k \quad A = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k \quad \text{نستنتج المجامع التالية}$$

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = (x+1)^n \quad \text{لدينا}$$

$$(f(x))' = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad \text{لدينا}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k = A \quad \text{بوضع } x=1 \quad n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \quad \text{ومنه}$$

$$B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k = n + \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = n + n2^{n-1} + 2^n$$

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k = 2n + 2 \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2n + n2^n + 2^n$$

حل تمرين 5

صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات تحمل الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- نحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 3 كرات بيضاء و كرتين حمراويتين.

$$C_5^3 A_5^3 A_5^2 = \frac{60}{3!} \times 60 \times 20 = 12000 \quad \text{عدد هذه السحبات هو}$$

2- نحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.

- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

$$\text{عدد هذه السحبات هو } C_5^1 A_2^1 A_4^4 + C_5^1 A_1^1 C_4^3 A_4^3 A_8^1 = 240 + 160 = 400$$

حل تمرين 6

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = \dots \quad \text{1- عدد الإمكانيات الممكنة هو}$$

$$A_9^4 + A_9^2 \times A_6^2 \quad \text{2- عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث هو}$$

حل تمرين 7

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث $\text{card}E = \text{card}F = n$

3- نبين أن عدد الأزواج $(X;Y)$ من $[P(E)]^2$ بحيث $X \cup Y = E$ و $n \geq 2$ هو 3^n

نضع $\text{card}X = p$ بما أن $X \cup Y = E$ فإن $Y = \bar{X} \cup A$ حيث $A \in P(X)$

ومنه عدد المجموعات الجزئية Y حيث $X \cup Y = E$ هو عدد عناصر $P(X)$ أي 2^p

و بما أن عدد أجزاء E التي رئيسها p هو C_n^p فإن عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $\text{card}X = p$

$$\text{هو } C_n^p 2^p$$

و حيث أن $p \in \{0;1;2;\dots;n\}$ فإن عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $X \cup Y = E$ هو

$$\sum_{p=0}^n C_n^p 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

4- نحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر. و نستنتج أن

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{C_n^k}{2}$$

*- بما أن $\text{card}(E \cup F) = 2n$ فإن عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر هو C_{2n}^n

*- كل جزء من $E \cup F$ يكون مكون من k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F حيث

$$k \in \{0;1;2;.....;n\}$$

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من k عنصر من E هو C_n^k

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من $n-k$ عنصر من F هو $C_n^{n-k} = C_n^k$

عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر يحتوي على k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F

$$\text{هو } C_n^k \times C_n^{n-k} = (C_n^k)^2 \text{ حيث } k \in \{0;1;2;.....;n\}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 \text{ إذن عدد أجزاء } E \cup F \text{ المكونة من } n \text{ هو}$$

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 \text{ ومنه نستنتج أن}$$

$$* \text{ نستنتج أن } \frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2$$

$$\text{نضع } S = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2$$

$$S = 0.(C_n^0)^2 + 1.(C_n^1)^2 + + (n-1).(C_n^{n-1})^2 + n.(C_n^n)^2$$

$$S = n.(C_n^n)^2 + (n-1).(C_n^{n-1})^2 + + 1.(C_n^1)^2 + 0.(C_n^0)^2$$

$$\text{لأن } C_n^{n-k} = C_n^k \text{ } S = n.(C_n^0)^2 + (n-1).(C_n^1)^2 + + 1.(C_n^{n-1})^2 + 0.(C_n^n)^2$$

$$2S = n.(C_n^0)^2 + n.(C_n^1)^2 + + n.(C_n^{n-1})^2 + n.(C_n^n)^2$$

$$2S = n \left((C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 \right) = n C_{2n}^n$$

$$\text{إذن } \frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2$$

حل تمرين 8

$$S_{(n,p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} \text{ و } S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i \text{ و } S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \text{ نحسب المجاميع التالية}$$

$$* \text{ نعلم أن } (a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$$

$$\text{نضع } a = -1 \text{ و } b = 1 \text{ ومنه } S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0$$

$$* \text{ لدينا } \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{1}{i+1} \times \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!(i+1)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{i+1}$$

$$S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n C_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^i$$

ومنه

$$S'_n = \frac{1}{n+1} \left(-C_{n+1}^0 + \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \right)$$

و حيث أن $\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i = 2^{n+1}$ فإن $S'_n = \frac{1}{n+1}(-1+2^{n+1})$

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \times \frac{(n-i)!}{(n-i-p+i)!(p-i)!} = \frac{n!}{i!} \times \frac{1}{(n-p)!(p-i)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{i!(p-i)!} \text{ لدينا } *$$

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_n^p C_p^i \text{ أي أن}$$

$$S_{(n,p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} = \sum_{i=0}^p C_n^p C_p^i = C_n^p \sum_{i=0}^p C_p^i = 2^p C_n^p = 2^p \times \frac{n!}{(n-p)!p!} \text{ وبالتالي}$$

حل تمرين 9

لتكن E مجموعة منتهية حيث $\text{card}E = n \geq 2$

نحدد عدد التطبيقات f المعرفة من E نحو E حيث $\text{card}[f(E)] = \frac{n}{2}$ (n زوجي)

نعتبر $F = \left\{ y_1; y_2; \dots; y_{\frac{n}{2}} \right\}$ و $Y_i = \{ \varphi / \forall x \in E; \varphi(x) \neq y_i \}$ حيث φ تطبيق من E نحو F

لدينا $F - \{y_i\} \Leftrightarrow \varphi \in Y_i$ تطبيق من E نحو $F - \{y_i\}$

عدد التطبيقات المعرفة من E نحو $F - \{y_i\}$ هو $\left(\frac{n}{2} - 1\right)^n$

y_i تقبل على الأقل سابق بالتطبيق f في E $f \in \overline{Y_i} \Leftrightarrow$

كل عنصر من F يقبل على الأقل سابق بـ f في E (أي f شمولي من E نحو

$$f \in \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i} \Leftrightarrow (F)$$

ومنه عدد التطبيقات الشمولية من E نحو F هو $\text{card} \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i}$

لدينا عدد التطبيقات المعرفة من E نحو F هو $\left(\frac{n}{2}\right)^n$

$$\text{card} \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i} = \text{card} \overline{\bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i} = \left(\frac{n}{2}\right)^n - \text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i \text{ ومنه}$$

$F - \{y_{i_1}; y_{i_2}; \dots; y_{i_k}\}$ نحو E تطبيق $\varphi \Leftrightarrow \varphi \in Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}$

$$\text{card}(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}) = \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \text{ ومنه}$$

$$\text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k < \frac{n}{2}} \text{card}(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}) \right)$$

$$\text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^k \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \text{ لدينا } C_{\frac{n}{2}}^k \text{ طريقة لاختيار } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k < \frac{n}{2} \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^k \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \text{ إذن عدد التطبيقات الشمولية من } E \text{ نحو } F \text{ هو}$$

لدينا $C_n^{\frac{n}{2}}$ لاختيار مجموعة F حيث $card F = \frac{n}{2}$; $F \subset E$

إذن عدد التطبيقات من E نحو E حيث $card[f(E)] = \frac{n}{2}$ هو $C_n^{\frac{n}{2}} \left[\binom{n}{\frac{n}{2}} - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_n^k \binom{n}{\frac{n}{2}-k} \right]$