

9- ليكن  $T$  مجموعة إزاحة المستوى. و  $H_0$  مجموعة التحاكيات التي مركزها  $O$ . و  $R_0$  مجموعة الدورانات التي لها نفس المركز  $O$ . التركيب "o" قانون تركيب داخلي في كل من  $T$  و  $H_0$  لأن:

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$$

$$h_{(O,R)} \circ h_{(O,R')} = h_{(O,RR')}$$

$$R_{(o,\alpha)} \circ R_{(o,\beta)} = R_{(o,\alpha+\beta)}$$

10- القانون \* المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) a * b = a^4 + a^3 - 3a^2b$$

قانون تركيب داخلي في  $\mathbb{R}$ .

11- نعتبر المجموعة  $E = \{1, 2, 3, 6\}$

لنبين أن المضاعف المشترك الأصغر "v" قانون تركيب داخلي في  $E$ .

ولهذا نضع الجدول التالي الذي يسمى جدول القانون في  $E$  أو جدول  $(E, v)$ .

v	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

نلاحظ أن مركب أي عنصر من  $E$  هو عنصر من  $E$ . وبالتالي القانون "v" قانون تركيب داخلي في  $E$ .

### 3- جزء مستقر بالنسبة لقانون تركيب داخلي:

#### (a) تعريف:

لتكن  $E$  مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي \* . وليكن  $S$  جزءا من  $(S \subset E) E$ .

نقول إن  $S$  جزء مستقر من  $(E, *)$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in S^2) x * y \in S$$

#### (b) أمثلة:

1-  $\mathbb{R}^+$  جزء مستقر من  $(\mathbb{R}, \times)$

2-  $\mathbb{R}_-$  ليس جزءا مستقرا من  $(\mathbb{R}, \times)$

3- نعتبر المجموعة:  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

$$(\forall (z, z') \in U^2) : |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(\forall (z, z') \in U^2) : zz' \in U$$

إذن  $U$  جزء مستقر من  $(\mathbb{C}, \times)$

#### ملاحظة:

إذا كان  $S$  جزءا مستقرا من  $(E, *)$  فإن \* قانون تركيب داخلي في  $S$ .

## (I) تعريف وأمثلة:

### 1- تعريف:

لتكن  $E$  مجموعة غير فارغة. نسمي قانون تركيب داخلي في  $E$

$$f : E \times E \rightarrow E :$$

كل تطبيق  $f$  من  $E$  نحو  $E$

$$(a, b) \rightarrow a * b$$

**ترميز:** العنصر  $f(a, b)$  يسمى مركب العنصرين  $(a, b)$

ونرمز له عادة ب  $a * b$  ;  $a \perp b$  ;  $a \perp b$  ;

إذا كان \* قانون تركيب داخلي في  $E$  فإننا نكتب  $(E, *)$  ونقرأ المجموعة  $E$  مزودة بالقانون \* .

**ملاحظة:** ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$  :

$$(\forall (a, b, c, d) \in E^4) \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a * c = b * d$$

لأن:

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow (a, c) = (b, d) \Rightarrow f(a, c) = f(b, d)$$

$$\Rightarrow a * c = b * d$$

(\* لدينا:

$$(\forall (a, b, c) \in E^3) \begin{cases} a = b \Rightarrow a * c = b * c \\ a = b \Rightarrow c * a = c * b \end{cases}$$

### 2- أمثلة:

1- الجمع والضرب قانونا تركيب داخلي في  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

2- الضرب قانون تركيب داخلي في  $\mathbb{R}^+$  لكنه ليس كذلك في  $\mathbb{R}^-$ . لأن إذا كان  $(a, b) \in \mathbb{R}_-^2$  فإن:  $(a \times b) \in \mathbb{R}^+$  أي

$$(a \times b) \notin \mathbb{R}_-$$

3- جمع متجهتين قانون تركيب داخلي في كل من  $V_2$  و  $V_3$ .

4- الجداء السلمي ليس قانون تركيب داخلي في  $V_2$  و  $V_3$ .

5- الجداء المتجهي قانون تركيب داخلي في  $V_3$ .

6- لتكن  $E$  مجموعة غير فارغة و  $P(E)$  مجموعة أجزاء  $E$ . الاتحاد والتقاطع والفرق التماثلي قوانين تركيب داخلية في  $P(E)$ .

7- ليكن  $X$  جزء من  $\mathbb{R}$ . ليكن  $F(X, \mathbb{R})$  مجموعة الدوال المعرفة من  $X$  نحو  $\mathbb{R}$ . الجمع والضرب المعرفين على  $F(X, \mathbb{R})$  كما يلي:

$$(\forall x \in X) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في  $F(X, \mathbb{R})$ .

8- لتكن  $A(E, E)$  مجموعة التطبيقات من  $E$  نحو  $E$ .

$E$  مجموعة غير فارغة.

التركيب  $\circ$  المعرف على  $A(E, E)$  ب:

$$(\forall x \in E) (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قانون تركيب داخلي في  $A(E, E)$ .

## (II) خاصيات قوانين التركيب الداخلي:

### 1- التجميعية والتبادلية:

#### (a) تعريف:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ .

(1) نقول إن القانون \* تجميعي في  $E$  إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a,b,c) \in E^3) a * (b * c) = (a * b) * c$$

(2) نقول إن القانون \* تبادلي في  $E$  إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a,b) \in E^2) a * b = b * a$$

#### ملاحظة:

إذا كان القانون \* تجميعي فإن:

$$a * (b * c) = a * b * c$$

#### (b) أمثلة:

القوانين (1), (3), (6), (7) و (9) التي رأيناها في أمثلة قوانين التركيب الداخلية كلها تجميعية وتبادلية (الفقرة I).

#### لنبين على (7) و (9):

لنبين أن الجمع تجميعي في  $F(X, \mathbb{R})$ :

ليكن  $f, g, h$  من  $F(X, \mathbb{R})$ . لنبين أن:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

$$(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$$

يعني:

$$(\forall x \in X)(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x)$$

$$= f(x) + g(x) + h(x)$$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$= (f + g)(x) + h(x)$$

$$= ((f + g) + h)(x)$$

(لأن الجمع تجميعي في  $\mathbb{R}$ ).

إذن  $f + (g + h) = (f + g) + h$  ومنه الجمع تجميعي في

$F(X, \mathbb{R})$ .

لنبين أن  $o$  تجميعي في  $T$ :

نعتبر  $t_{\bar{u}}$  و  $t_{\bar{v}}$  و  $t_{\bar{w}}$  من  $T$  لنبين أن:

$$t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

لدينا:

$$t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = t_{\bar{u}} o t_{\bar{v} + \bar{w}}$$

$$= t_{\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})} = t_{\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}} = t_{\bar{u} + \bar{v}} o t_{\bar{w}}$$

$$= (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

(لأن الجمع تجميعي في  $V_3$ ).

إذن:

$$(\forall (t_{\bar{u}}, t_{\bar{v}}, t_{\bar{w}}) \in T^3); t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

إذن  $o$  تجميعي في  $T$ .

#### ملاحظة:

الجداد المتجهي ليس تجميعيا ولا تبادليا في  $V_3$ .

ليكن  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{h})$  معلم م.م مباشر.

← لدينا  $\bar{i} \wedge \bar{j} = -\bar{j} \wedge \bar{i}$  ليس تبادليا.

← لدينا  $(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} = \bar{h} \wedge \bar{j} = -\bar{i}$

$$\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j}) = \bar{i} \wedge \bar{0} = \bar{0} \quad \text{و}$$

$$(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} \neq \bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j}) \quad \text{إذن}$$

ومنه "∧" (الجداد المتجهي) ليس تجميعيا في  $V_3$ .

#### تمرين تطبيقي:

نعتبر القانون \* المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$x * y = x + y + xy$$

ادرس تجميعية وتبادلية القانون \*.

التبادلية:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x * y = x + y + xy \quad \text{لدينا:}$$

$$= y + x + yx = y * x$$

إذن  $x * y = y * x$  ومنه \* تبادلي.

التجميعية:

ليكن  $x, y, z$  من  $\mathbb{R}$  لنتحقق هل:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

لدينا:

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$$

$$= x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

$$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \quad (1)$$

ولدينا:

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \quad (2)$$

وبما أن (1) و (2) فإن \* تجميعي:

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) (x * y) * z = x * (y * z)$$

#### (c) تجميعية مركب تطبيقي:

#### خاصية:

نعتبر التطبيقات من:

$$E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$$

$$ho(gof) = (hog)of \quad \text{لدينا:}$$

هذا لا يعني أن  $o$  تجميعي.

$$ho(gof) = (hog)of \quad \text{لنبين أن:}$$

يعني:

$$(\forall x \in E) (ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$$

ليكن  $x \in E$

$$h(z) = t \text{ و } f(x) = z \text{ و } g(x) = y \text{ نضع}$$

لدينا:

$$((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(y)$$

$$= h(g(y)) = h(z) = t$$

ولدينا:

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x))$$

$$= h(g(f(x))) = h(g(y))$$

$$= h(z) = t$$

إذن:

$$(\forall x \in E)((hog)of)(x) = (ho(gof))(x)$$

$$(hog)of = ho(gof) \quad \text{ومنه:}$$

## حالة خاصة:

ليكن  $A(E, E)$  مجموعة التطبيقات من  $E$  نحو  $E$ .  
لدينا "o" قانون تجميعي غير تبادلي في  $A(E, E)$ .

## 2- العنصر المحايد:

### (a) تعريف:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$  و  $e \in E$ .  
نقول إن  $e$  عنصر محايد في  $E$  بالنسبة للقانون \* أو عنصر محايد في  $(E, *)$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) e * x = x \text{ et } x * e = x$$

### ملاحظة:

إذا كان القانون \* تبادلي فإن  $e$  عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

### (b) أمثلة:

- ← العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من  $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{N}, +)$
- ← العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من  $(\mathbb{C}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{N}, \times)$
- ←  $\bar{0}$  هو العنصر المحايد في كل من:  $(V_3, +), (V_2, +)$
- ←  $\emptyset$  هو العنصر المحايد في  $(P(E), \cup)$
- ←  $E$  هو العنصر المحايد في  $(P(E), \cap)$
- ←  $\emptyset$  هو العنصر المحايد في  $(P(E), \Delta)$
- ← الدالة  $\theta: x \rightarrow 0$  هو العنصر المحايد في  $(F(X, \mathbb{R}), +)$
- ← الدالة  $f: x \rightarrow 1$  هو العنصر المحايد في  $(F(X, \mathbb{R}), \times)$
- ← التطبيق المطابق  $Id_E: x \rightarrow x$  عنصر محايد في  $(A(E, E), o)$   
 $(f \circ Id_E = Id_E \circ f = f)$

### ملاحظة:

نعتبر القانون \* المعرف على  $\mathbb{N}^*$  بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}) a * b = a^b$$

$$\text{لدينا: } (1) (\forall a \in \mathbb{N}^*) a * 1 = a^1 = a$$

$$\text{ولدينا: } 1 * a = 1^a = 1$$

إن 1 ليس عنصر محايداً.

وبما أنه يحقق (1) نقول إن 1 محايد على اليمين.

### تعريف:

← نقول إن  $e$  عنصر محايد على اليمين في  $(E, *)$  إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

← نقول إن  $e$  عنصر محايد على اليسار في  $(E, *)$  إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) e * x = x$$

← يكون  $e$  محايداً إذا وفقط إذا كان محايداً على اليمين وعلى اليسار.

### (c) وحدانية العنصر المحايد:

#### خاصية:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ . إذا كان للقانون \* عنصراً محايداً فإنه وحيد.

#### برهان:

نفترض أن \* يقبل عنصرين محايدين  $e'$  و  $e$

لدينا  $e$  عنصر محايد و  $e' \in E$  إذن:  $e * e' = e'$

ولدينا  $e' = e * e' = e$  إذن:  $e \in E$  و  $e' = e$

ومنه العنصر المحايد وحيد. (إذا كان موجوداً).

## تمارين تطبيقية:

### تمرين (1):

نعتبر \* القانون المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

- هل للقانون \* عنصر محايد؟

. لنبحث عن  $e$  من  $\mathbb{R}$  بحيث:  $(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x * e = x$

ونلاحظ أن \* تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن  $e$  بحيث:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x$$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ex - 4e - 4x + 20 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x(e - 5) - 4e + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e - 5 = 0 \\ 20 - 4e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ e = 5 \end{cases}$$

إذن  $e = 5$  هو العنصر المحايد للقانون \*.

### تمرين (2):

نعتبر القانون \* المعرف على  $\mathbb{R}$  ب:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x * y = x + 4y - 1$$

هل للقانون \* عنصر محايد؟

. لنبحث عن  $e$  من  $\mathbb{R}$  بحيث  $(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = e * x = x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = x \text{ et } e * x = x$$

يعني:

- لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 4x - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 0 \\ e - 1 = 0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن \* لا يقبل عنصراً محايداً في  $\mathbb{R}$ .

## 3- العنصر المماثل:

### (a) تعريف:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ . نفترض أن \* يقبل عنصراً محايداً  $e$ .

نقول إن عنصراً  $x$  من  $E$  يقبل ممثلاً بالنسبة ل \* إذا وفقط إذا وجد عنصر  $x'$  من  $E$  بحيث:

$$x * x' = x' * x = e$$

### ملاحظة:

إذا كان القانون \* تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

### (b) أمثلة:

← في كل من  $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +)$  كل عنصر  $x$  يقبل ممثلاً هو  $-x$ .

← في  $(\mathbb{C}^*, \times); (\mathbb{R}^*, \times); (\mathbb{Q}^*, \times)$  كل عنصر  $x$  يقبل ممثلاً هو

$$\frac{1}{x}$$

$$\text{لأن: } x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

← ليكن  $B(E, E)$  مجموعة التبادلات من  $E$  نحو  $E$ .

$$\text{فإن: } x' = \frac{4x-15}{x-4} \text{ ومنه } x \text{ يقبل مماثلا هو } \frac{4x-15}{x-4}$$

← إذا كان  $x=4$

فإن  $o=1$  ومنه 4 لا يقبل مماثلا

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا هي:  $\mathbb{R} - \{4\}$

$$\text{والمماثل هو: } \frac{4x-15}{x-4}$$

#### 4- العنصر المنتظم:

##### (a) تعريف:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ . نقول إن عنصرا  $a$  من  $E$  منتظم إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in E^2) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

##### ملاحظة:

إذا كان القانون \* تبادلي فإن أحد الاستلزامين كاف.

##### (b) أمثلة:

← جميع عناصر كل من المجموعات  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  منتظمة

بالنسبة للجمع لأن:  $a+x = a+y \Rightarrow x=y$

← في كل من  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  كل عنصر  $a \neq 0$  منتظم بالنسبة

للضرب لأن:  $ax = ay \Rightarrow x=y$

##### تمرين:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ ، تجميعي.

$e$  العنصر المحايد في  $(E, *)$ . ليكن  $a \in E$ .

- بين أنه إذا كان  $a$  يقبل مماثلا فإن  $a$  منتظم.

نفترض أن  $a$  يقبل مماثلا  $a'$

لنبين أن  $a$  منتظم أي:

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

لدينا:

$$a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

$$\Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y$$

$$\Rightarrow e * x = e * y$$

$$\Rightarrow x = y$$

وبنفس الطريقة نبين أن:  $x * a = y * a \Rightarrow x = y$

إذن  $a$  منتظم.

### (III) التشاكل:

#### 1- تعريف وأمثلة:

##### (a) تعريف:

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ .

و  $T$  قانون تركيب داخلي في  $F$ .

نسمة تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  كل تطبيق  $f: E \rightarrow F$

يحقق ما يلي:

$$(\forall (x, y) \in E^2): f(x * y) = f(x) T f(y)$$

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في  $B(E, E)$  العنصره المحايد هو التطبيق الطابق  $Id_E$ .

كل عنصر  $f$  من  $B(E, E)$  له مماثل هو تقابله العكسي  $f^{-1}$

$$\text{لأن: } f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$$

#### (c) خاصيات:

##### خاصية (1):

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ .  
نفترض أن القانون \* يقبل عنصرا محايدا  $e$  وتجميعي. إذا كان لعنصر  $x$  مماثل  $x'$  فإن هذا المماثل وحيد.

##### برهان:

نفترض أن  $x$  يقبل مماثلين  $x'$  و  $x''$ .

$$\text{يعني: } x * x' = x' * x = e$$

$$x * x'' = x'' * x = e$$

- لدينا:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x''$$

$$= e * x'' = x''$$

إذن  $x' = x''$

##### خاصية (2):

ليكن \* قانون تركيب داخلي في  $E$ .  
نفترض أن القانون \* يقبل عنصرا محايدا  $e$  وتجميعي.

إذا كان لعنصرين  $x$  و  $y$  مماثلان  $x'$  و  $y'$  فإن:  $x * y$  يقبل مماثلا هو  $y' * x'$ .

$$\text{يعني: } (x * y)' = y' * x'$$

##### برهان:

لدينا:

$$(x * y) * (y' * x')$$

$$= x * (y * y') * x' = x * e * x'$$

$$= (x * e) * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x * y) = e \quad \text{وبنفس الطريقة نجد:}$$

##### استنتاج:

ليكن  $g \circ f$  من  $B(E, E)$ .

مماثل  $f$  هو  $f^{-1}$  ومماثل  $g$  هو  $g^{-1}$ .

مماثل  $f \circ g$  هو  $g^{-1} \circ f^{-1}$ .

ونعلم أن مماثل  $f \circ g$  هو  $(f \circ g)^{-1}$

$$\text{إذن: } (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

##### تمرين:

نعتبر القانون \* المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

من خلال ما سبق 5 هو العنصر المحايد.

- حدد العناصر التي تقبل مماثلا.

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

لنتحقق هل  $x$  يقبل مماثلا.

لنبحث عن  $x'$  بحيث  $x * x' = 5$  (القانون تبادلي).

$$\text{لدينا: } x * x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5$$

$$\Leftrightarrow x'(x-4) = 4x-15$$

← إذا كان  $x \neq 4$

## (b) أمثلة:

1- نعتبر التطبيق:  $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$

$$x \rightarrow ax$$

لنبين أن  $f$  تشاكل.

يعني:  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = a(x+y) = ax+ay$$

$$= f(x) + f(y)$$

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}, +)$ .

2- نعتبر  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$r \rightarrow a^r \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

بين أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{Q}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}, \times)$

- ليكن  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}$ .

$$f(r+r') = f(r) \times f(r')$$

لدينا:

$$f(r+r') = a^{r+r'} = a^r \times a^{r'} = f(r) \times f(r')$$

$$(\forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2) f(r+r') = f(r) \cdot f(r')$$

ومنه  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{Q}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}, \times)$ .

## تمارين تطبيقية:

### تمرين 1:

نعرف في  $\mathbb{R}^2$  جمع زوجين و جداء زوجين بما يلي:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

ونعتبر التطبيق  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$z = a+ib \rightarrow (a, b)$$

بين أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, +)$

بين أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, \times)$

← لنبين أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, +)$ .

$$z' = a'+ib' \text{ et } z = a+ib$$

$$f(z+z') = f(z) + f(z')$$

لدينا:

$$z+z' = (a+ib) + (a'+ib')$$

$$= (a+a') + i(b+b')$$

$$f(z+z') = (a+a', b+b')$$

$$= (a, b) + (a', b') = f(z) + f(z')$$

إذن:

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, +)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, +)$ .

← لنبين أن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, \times)$ .

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z') \quad \text{ليكن } z = a+ib \text{ و } z' = a'+ib'$$

$$z' = a'+ib'$$

لدينا:

$$z \cdot z' = (a+ib) \cdot (a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

إذن:

$$f(z \cdot z') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(z) \cdot f(z') &= (a, b) \cdot (a', b') \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ \text{إذن } f(z \cdot z') &= f(z) \cdot f(z') \end{aligned}$$

ومنه  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}, \times)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, \times)$

### تمرين 2:

نعتبر المجموعة  $A = \{f_{(a,b)} : x \rightarrow ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

ونعرف على  $\mathbb{R}^2$  القانون  $T$  بمايلي

$$(a,b)T(a',b') = (aa', ab'+b)$$

$$\varphi : (A, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}^2, T)$$

$$f_{(a,b)} \rightarrow (a,b)$$

بين أن  $\varphi$  تشاكل

يكون  $\varphi$  تشاكل من  $(A, \circ)$  نحو  $(\mathbb{R}^2, T)$  إذا فقط إذا كان:

$$(\forall (f_{(a,b)}, f_{(a',b')}) \in A^2):$$

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')})(x) = f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x))$$

$$= f_{(a,b)}(a'x + b')$$

$$= a(a'x + b') + b$$

$$= aa'x + ab' + b$$

إذن:

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = (aa', ab'+b)$$

$$= (a,b)T(a',b')$$

$$= \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

ومنه:  $\varphi$  تشاكل

### 2- خاصيات:

#### خاصية 1

ليكن  $f$  تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$

لدينا  $f(E)$  جزء مستقر من  $(F, T)$ .

#### برهان:

$$(E, *) \rightarrow (F, T) : f \text{ تشاكل.}$$

لنبين أن  $f(E)$  مستقر من  $(F, T)$

(\* ) لدينا  $f(E) \subset F$

(\* ) ليكن  $x' \text{ و } y' \in f(E)$  . لنبين أن:  $x'Ty' \in f(E)$

لدينا  $x' \text{ و } y' \in f(E)$  . إذن يوجد  $x \text{ و } y \in E$  بحيث:

$$x' = f(x) \text{ و } y' = f(y)$$

إذن:

$$x'Ty' = f(x)Tf(y) = f(x*y)$$

ولدينا  $x*y \in E$

$$\text{إذن } f(x*y) \in f(E) \text{ يعني: } x'Ty' \in f(E)$$

إذن  $f(E)$  مستقر من  $(F, T)$ .

#### ملاحظة:

إذا كان  $f$  تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  فإن  $T$  قانون تركيب

داخلي في  $f(E)$ .

## الزمرة: (IV) Groupe

### 1- تعريف:

لتكن  $G$  مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي  $*$  نقول إن  $(G, *)$  زمرة إذا فقط إذا تحققت الشروط التالية:  
 ← " " \* " تجميعي في  $G$   
 ← " " \* " يقبل عنصرا محايدا.  
 ← كل عنصر من  $G$  يقبل مائثلا.

### ملاحظات:

ليكن  $(G, *)$  زمرة.  
 ← إذا كان " " \* " تبادلي، نقول إن  $(G, *)$  زمرة تبادلية أو أبيلية (Abelian).  
 ← إذا كانت  $G$  منتهية. نقول إن  $(G, *)$  زمرة منتهية.  
 ← يمكن أن نرسم للقانون " " \* " بالجمع " + " (دون أن يكون هو الجمع المعتاد) وفي هذه الحالة نرسم للعنصر المحايد ب " 0 ". ونرسم للمائث  $x^{-1}$ .  
 ← يمكن أن نرسم للقانون " " \* " بالضرب " . " (دون أن يكون هو الضرب الاعتيادي). وفي هذه الحالة نرسم للعنصر المحايد ب 1. ولمائث  $x^{-1}$ .

### 2 - أمثلة:

← كل من  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$  زمرة تبادلية.  
 ← كل من  $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \times)$ ,  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية.  
 ← كل من  $(V_2, +)$  و  $(V_3, +)$  زمرة تبادلية.  
 ←  $(F(X, \mathbb{R}), +)$  زمرة تبادلية.  
 ←  $(B(E, E), o)$  (مجموعة التبادلات)، زمرة غير تبادلية.  
 ← كل من  $(T, o)$ ,  $(H_o, o)$ ,  $(R_o, o)$  زمرة تبادلية.  
 ←  $(P(E), \cup)$  و  $(P(E), \cap)$  ليسا زميرتين.  
 ←  $(P(E), \Delta)$  زمرة تبادلية.

### 3- خاصيات

#### خاصية (1):

لتكن  $(G, *)$  زمرة. لدينا ما يلي:  
 ← " " \* " تجميعي.  
 ← " " \* " يقبل عنصرا محايدا.  
 ← كل عنصر  $x$  من  $G$  يقبل مائثلا  $x'$  في  $G$ .  
 ← كل عنصر  $a$  من  $G$  منتظم (لأنه يقبل مائثلا).  
 ←  $(\forall (a, x, y) \in G^3) a * x = a * y \Leftrightarrow x = y$   
 $x * a = y * a \Leftrightarrow x = y$   
 تلخص هذه الخاصية بقولنا: يمكن الاختزال في زمرة وبدون شروط.

#### خاصية (2):

لتكن  $(G, *)$  زمرة. وليكن  $a$  و  $b$  من  $G$ .  
 كل من المعادلتين:  $a * x = b$  (1) و  $x * a = b$  (2) تقبل حلا وحيدا في  $G$ .

#### برهان:

## خاصية (2):

ليكن  $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$  تشاكلا.  
 \* إذا كان  $*$  تجميعي في  $E$  فإن  $T$  تجميعي في  $f(E)$ .  
 \* إذا كان  $*$  تبادلي في  $E$  فإن  $T$  تبادلي في  $f(E)$ .  
 \* إذا كان  $L$  \* عنصر محايد  $e$  في  $E$  فإن  $T$  يقبل مائثلا في  $(f(E), T)$  هو  $f(x')$  يعني:  $(f(x))' = f(x')$ .

### برهان:

$f: (E, *) \rightarrow (F, T)$  تشاكل.  
 ← نفترض أن  $*$  تجميعي في  $E$ . لنبين أن  $T$  تجميعي في  $f(E)$ .  
 ليكن  $x', y', z'$  من  $f(E)$ . لنبين أن  $x'T(y'Tz') = (x'Ty')Tz'$ .  
 لدينا  $x', y', z' \in f(E)$ . إذن يوجد  $x, y, z$  من  $E$  بحيث:  
 $x' = f(x); y' = f(y); z' = f(z)$   
 إذن:

$$\begin{aligned} (x'Ty')Tz' &= (f(x)Tf(y))Tf(z) \\ &= f(x * y)Tf(z) \\ &= f[(x * y) * z] \\ &= f[x * (y * z)] = f(x)Tf(y * z) \\ &= f(x)T(f(y)Tf(z)) \\ (x'Ty')Tz' &= x'T(y'Tz') \end{aligned}$$

ومنه  $T$  تجميعي في  $(E)$   
 + بنفس الطريقة نبين أن  $T$  تبادلي في  $f(E)$ .  
 + نفترض أن  $e$  عنصر محايد في  $(E, *)$ . لنبين أن  $f(e)$  عنصر محايد في  $f(E)$ .  
 ليكن  $x'$  من  $f(E)$ . لنبين أن:  $x'Tf(e) = f(e)Tx' = x'$ .  
 لدينا  $x' \in f(E)$  إذن يوجد  $x$  من  $E$  بحيث  $x' = f(x)$ .  
 بنفس الطريقة نجد:  $f(e)Tx' = x'$ .  
 إذن  $f(e)$  هو العنصر المحايد في  $f(E)$ .  
 ← نفترض أن  $x'$  هو مائث  $x$  في  $(E, *)$ . لنبين أن  $f(x')$  هو مائث  $f(x)$  في  $(f(E), T)$ .  
 يعني:  $f(x)Tf(x') = f(x')Tf(x) = f(e)$   
 لدينا:  
 $f(x)Tf(x') = f(x * x') = f(e)$   
 $f(x')Tf(x) = f(x' * x) = f(e)$   
 إذن  $f(x')$  هو مائث  $f(x)$  في  $(f(E), T)$ .

### ملاحظة:

(1) إذا كان  $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$  تشاكلا فإن  $f$  ينقل خاصيات  $*$  في  $E$  إلى  $T$  في  $f(E)$ .  
 وإذا كان  $f$  شمولي فإن  $f(E) = F$  وبالتالي  $f$  ينقل خاصيات  $*$  في  $E$  إلى  $T$  في  $F$ .  
 (2) نقول إن مجموعتين  $F$  و  $E$  متشاكلتان إذا فقط إذا وجد تشاكل من  $E$  نحو  $F$ .  
 - ونقول إن  $F$  و  $E$  متشاكلتان تقابليا إذا فقط إذا وجد تشاكل تقابلي من  $E$  نحو  $F$ .

### برهان:

(\* لدينا  $H \neq \emptyset$  لأنها تضم العنصر المحايد.  
\* لنبين أن  $e$  هو العنصر المحايد في  $H$ :  
ليكن  $e'$  العنصر المحايد في  $H$ .  
لنبين أن  $e = e'$ :  
ليكن  $x \in H$

لدينا  $e'x = x$  لأن:  $x * e' = x$  (1)

ولدينا  $H \subset G$  إذن  $x \in G$ . ولدينا  $e$  هو العنصر المحايد في  $G$  إذن

$$(2) x * e = x$$

من (1) و (2) نجد:  $x * e' = x * e$   
إذن:  $e' = e$

إذن  $e$  هو العنصر المحايد في  $H$ .

(\* ليكن  $x \in H$  و  $x'$  مماثل  $x$  في  $G$ .

لنبين أن  $x'$  ينتمي ل  $H$ .

ليكن  $x''$  مماثل  $x$  في  $H$ .

$$\text{لدينا: } \begin{cases} x * x' = e \\ x * x'' = e' = e \end{cases} \text{ إذن } x * x' = x * x''$$

$$\text{إذن } x' = x''$$

ومنه  $x' \in H$

(\* ليكن  $x$  و  $y$  من  $H$ . و  $y'$  مماثل  $y$  في  $G$ .

لنبين أن  $x * y' \in H$ .

لدينا  $y \in H$ . ومن خلال ما سبق  $y' \in H$ .

$$\text{إذن: } \begin{cases} x \in H \\ y' \in H \end{cases} \text{ إذن } x * y' \in H \text{ لأن } H \text{ جزء مستقر من } G.$$

### خاصية (2):

ليكن  $(G, *)$  زمرة. و  $H$  جزء من  $G$ .

تكون  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  إذا وفقط إذا كان:

$$(*) H \neq \emptyset$$

$$(*) (\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$$

حيث  $y'$  مماثل  $y$  في  $G$ .

### برهان:

(\* نفترض أن  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$ .

من خلال الخاصية السابقة لدينا:

$$H \neq \emptyset$$

و  $(\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$  مع  $y'$  مماثل  $y$  في  $G$ .

(\* نفترض أن

$$(II) (\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H \text{ و } H \neq \emptyset$$

لنبين أن  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$ .

1- لدينا  $H \neq \emptyset$  إذن يوجد  $a \in H$ :

$$\text{لدينا } (a, a) \in H^2$$

إذن من خلال (II):  $a * a' \in H$

$$e \in H \text{ يعني:}$$

2- ليكن  $x \in H$ .

لدينا  $(e, x) \in H^2$  إذن:  $e * x' \in H$

$$x' \in H \text{ يعني:}$$

$$\text{إذن } (\forall x \in H): x' \in H$$

$$(1) \Leftrightarrow a * x = b$$

$$\Leftrightarrow a' * a * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow e * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow x = a' * b$$

إذن (1) تقبل حلا وحيدا في  $G$  هو  $a' * b$   
- بنفس الطريقة نجد أن (2) تقبل حلا وحيدا في  $G$ :  $b * a'$

### استنتاج:

ليكن  $(G, *)$  زمرة. وليكن  $a \in G$ .

نعتبر التطبيق  $f: G \rightarrow G$   $g: G \rightarrow G$

$$x \rightarrow x * a \quad x \rightarrow a * x$$

التطبيقان  $f$  و  $g$  تقابلان.

### 4- زمرة جزئية: Sous - groupe

#### (a) تعريف:

لتكن  $(G, *)$  زمرة. و  $H$  جزء مستقر من  $(G, *)$ .

نقول إن  $(H, *)$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  أو  $H$  زمرة جزئية ل  $G$ :

إذا وفقط إذا كان  $(H, *)$  زمرة.

#### (b) أمثلة:

←  $(\mathbb{Q}, +)$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{R}, +)$ .

←  $(\mathbb{R}^*, \times)$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

← لتكن  $B(P, P)$  مجموعة تقابلات المستوى.

كل من  $(R_o, o), (H_o, o), (T, o)$  زمرة جزئية ل  $(B(P, P), o)$ .

← ليكن  $(G, *)$  زمرة عنصرها المحايد  $e$ .

لدينا  $(\{e\}, *)$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$ .

و  $(G, *)$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$ .

وكل زمرة جزئية  $H$  تخالف هتين الزمرتين تسمى زمرة جزئية فعلية (non trivial)

#### ملاحظة:

يمكن لزمرة  $G$  أن تكون غير تبادلية لكن الزمرة الجزئية تبادلية.

- مثال:  $(B(P, P), o)$  غير تبادلية.

لكن  $(T, o)$  تبادلية.

#### (c) خاصيات:

##### خاصية (1):

لتكن  $(G, *)$  زمرة عنصرها المحايد  $e$  ولتكن  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$ .

لدينا ما يلي:

$$\leftarrow H \neq \emptyset$$

←  $e$  هو العنصر المحايد في  $H$ .

← إذا كان  $x \in H$  و  $x'$  مماثل  $x$  في  $G$ , فإن  $x' \in H$ .

$$\leftarrow (\forall (x, y) \in H^2): x * y' \in H$$

حيث  $y'$  مماثل  $y$  في  $G$ .

حيث  $x'$  هو مماثل  $x$  في  $G$ .

3- ليكن  $x, y \in H$

من خلال ما سبق نستنتج أن  $y' \in H$ .

إذن  $(x, y') \in H^2$  ومن (III) نجد:  $x*(y')' \in H$

يعني:  $x*y \in H$

إذن  $H$  جزء مستقر.

ومنه القانون \* قانون تركيب داخلي في  $H$ .

4- لنبين أن  $(H, *)$  زمرة:

- تجميعي في  $G$  إذن \* تجميعي في  $H$

-  $e \in H$  و  $e*x = x*e = x$  :  $(\forall x \in H)$

إذن  $e$  العنصر المحايد في  $H$ .

- ليكن  $x \in H$

لدينا  $x \in G$  إذن  $x$  يقبل مماثل  $x'$  في  $G$ . يعني:

$x*x' = x'*x = e$  ومن خلال ما سبق لدينا  $x' \in H$ .

إذن  $x'$  هو مماثل  $x$  في  $H$ . وبالتالي  $(H, *)$  زمرة جزئية.

### ملاحظة:

1- إذا رمزنا للقانون " \* " ب " + " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$H \neq \emptyset$

$(\forall (x, y) \in H^2) x - y \in H$

\* إذا رمزنا للقانون " \* " ب "  $\times$  " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$H \neq \emptyset$

$(\forall (x, y) \in H^2) x.y^{-1} \in H$

2- لتكن  $(G, *)$  زمرة و  $H \subset G$

تكون  $(H, *)$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  إذا وفقط إذا كان:

$H \neq \emptyset$  (\*)

$(\forall (x, y) \in H^2) x + y \in H$  (\*)

$(\forall x \in H) : x' \in H$  (\*) (  $x'$  مماثل  $x$  في  $G$  ).

### تمارين تطبيقية:

#### تمرين (1):

نعتبر المجموعة:  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

بين أن  $(U, \times)$  زمرة تبادلية.

(\*) لنبين أن  $(U, \times)$  زمرة تبادلية:

نعلم أن  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن  $(U, \times)$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

← لدينا:

$$(\forall z \in U) : |z| = 1$$

إذن:  $z \neq 0$

إذن:  $z \in \mathbb{C}^*$

إذن:  $U \in \mathbb{C}^*$

← لدينا  $U \neq \emptyset$  ( لأن  $1 \in U$  ).

← ليكن  $z_1, z_2 \in U$ . لنبين أن:  $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

$$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times \left| \frac{1}{z_2} \right|$$

لدينا:

$$= |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} = 1$$

لأن  $|z_1| = 1$

و  $|z_2| = 1$

إذن:  $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

وبالتالي فإن  $U$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

ومنه فإن  $(U, \times)$  زمرة تبادلية.

#### تمرين (2):

ليكن  $n \in \mathbb{N}$ . نعتبر المجموعة:

$$n\mathbb{Z} = \{nk / k \in \mathbb{Z}\}$$

بين أن  $(n\mathbb{Z}, +)$  زمرة تبادلية.

(\*) لنبين أن:  $(n\mathbb{Z}, +)$  زمرة تبادلية.

لدينا  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ . ونعلم أن  $(\mathbb{Z}, +)$  زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن  $(n\mathbb{Z}, +)$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{Z}, +)$ :

← لدينا  $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$  ( لأن  $0 \in n\mathbb{Z}$  ).

← ليكن  $x, y$  من  $n\mathbb{Z}$ . لنبين أن:  $x - y \in n\mathbb{Z}$ .

لدينا  $x, y$  من  $n\mathbb{Z}$  إذن يوجد  $k_1$  و  $k_2$  بحيث:

$$x = nk_1 \text{ و } y = nk_2$$

إذن:

$$x - y = nk_1 - nk_2 = n(k_1 - k_2)$$

$$= nk_3$$

مع  $k_3 = k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$

إذن:  $x - y \in n\mathbb{Z}$

ومنه  $(\forall (x, y) \in n\mathbb{Z}^2) : x - y \in n\mathbb{Z}$

وبالتالي  $(n\mathbb{Z}, +)$  زمرة جزئية ل  $(\mathbb{Z}, +)$ .

إذن  $(n\mathbb{Z}, +)$  زمرة تبادلية.

#### تمرين (3):

لتكن  $(G, .)$  زمرة عنصرها المحايد  $e$ .

ليكن  $a \in G$

نضع:  $C_a = \{x \in G / a.x = x.a\}$  (centralisateur de a)

$$Z(G) = \{x \in G / (\forall y \in G) : x.y = y.x\}$$

(centre de G)

بين أن  $C_a$  و  $Z(G)$  زمرتان جزئيتان ل  $(G, .)$ .

(\*) لنبين أن:  $C_a$  زمرة جزئية ل  $(G, .)$ :

← لدينا:  $a.e = e.a = a$

إذن:  $e.a = a.e$  إذن  $e \in C_a$

ومنه:  $C_a \neq \emptyset$ .

← ليكن  $x, y$  من  $C_a$ . لنبين أن:  $x.y^{-1} \in C_a$

يعني:  $a.(x.y^{-1}) = (x.y^{-1}).a$

لدينا  $x, y$  من  $C_a$  إذن:



### تمرين:

لتكن  $(G, \cdot)$  زمرة.

نعتبر التطبيق:  $f_a: G \rightarrow G$

$$x \rightarrow a.x.a^{-1}$$

(1) بين أن  $f_a$  تشاكل تقابلي من  $(G, \cdot)$  إلى  $(G, \cdot)$

(2) نعتبر المجموعة:

$$F = \{f_a / a \in G\}$$

(a) بين أن "o" قانون تركيب داخلي في  $F$ .

(b) نعتبر التطبيق

$$a \rightarrow f_a$$

← بين أن  $h$  تشاكل شمولي من  $(G, \cdot)$  نحو  $(F, o)$

← استنتج أن  $(F, o)$  زمرة.

(1) \* لنبين أن  $f_a$  تشاكل من  $(G, \cdot)$  نحو  $(G, \cdot)$

ليكن  $x, y$  من  $G$ .

لنبين أن:  $f_a(x.y) = f_a(x).f_a(y)$

$$f_a(x.y) = a.x.y.a^{-1} \quad \text{لدينا:}$$

$$= a.x.e.y.a^{-1}$$

$$= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1}$$

$$= (a.x.a^{-1}).(a.y.a^{-1})$$

$$= f_a(x).f_a(y)$$

إذن  $f_a$  تشاكل.

(\* لنبين أن  $f_a$  تقابل:

ليكن  $y \in G$ . لنبحث عن  $x$  من  $G$  بحيث:  $f_a(x) = y$

$$f_a(x) = y \Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}.a.x.a^{-1} = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow e.x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \in G$$

إذن كل عنصر  $y$  من  $G$  يقبل سابق وحيد  $x = a^{-1}.y.a$

إذن  $f_a$  تقابل.

ومنه  $f_a$  تشاكل تقابلي من  $(G, \cdot)$  نحو  $(G, \cdot)$ .

(2) لنبين أن "o" قانون تركيب داخلي في  $F$ .

ليكن  $f_a, f_b \in F$  من  $F$ . لنبين أن  $f_a \circ f_b \in F$

ليكن  $x \in G$ . لنحسب  $f_a \circ f_b(x)$

$$f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x))$$

$$= f_a(b.x.b^{-1})$$

$$= a.b.x.b^{-1}.a^{-1} = a.b.x.(ab)^{-1} = f_{ab}(x)$$

$$(\forall x \in G): f_a \circ f_b(x) = f_{ab}(x) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{cases} x.a = a.x & (1) \\ y.a = a.y & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2):  $(y.a)^{-1} = (a.y)^{-1}$

يعني:

$$a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1}$$

إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x \\ a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1} \end{cases}$$

$$x.a.a^{-1}.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{إذن:}$$

$$x.e.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.a^{-1}.a \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.e \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$(\forall (x, y) \in C_a^2) x.y^{-1} \in C_a \quad \text{إذن:}$$

ومنه  $C_a$  زمرة جزئية ل  $(G, \cdot)$

(\* لنبين أن  $Z(G)$  زمرة جزئية ل  $(G, \cdot)$ :

← لدينا:  $(\forall y \in G): e.y = y.e = y$

$$e \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

← ليكن  $b$  هو  $Z(G)$  من  $Z(G)$ . لنبين أن:  $a.b^{-1} \in Z(G)$

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{يعني:}$$

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{ليكن } y \in G \text{ لنبين أن:}$$

- لدينا  $b$  هو  $Z(G)$  من  $Z(G)$  إذن:

$$\begin{cases} a.y = y.a & (1) \\ b.y = y.b & (2) \end{cases}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن:

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

$$a.b^{-1} \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

ومنه  $Z(G)$  زمرة جزئية ل  $(G, \cdot)$ .

### 5- تشاكل زمرة:

#### خاصية:

لتكن  $(G, *)$  زمرة.  $E$  مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي  $T$ . و

$$f: (G, *) \rightarrow (E, T)$$

لدينا ما يلي:

(\*  $(f(G), T)$  زمرة.

(\* إذا كانت  $(G, *)$  زمرة تبادلية فإن  $(f(G), T)$  زمرة تبادلية.

(\* إذا كان  $f$  تشاكل شمولي، فإن:  $f(G) = E$  إذن:  $(E, T)$  زمرة.

نقول إن التشاكل يحول زمرة إلى زمرة.

## 2) تعريف حلقة:

### تعريف:

لتكن  $A$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$  نقول إن  $(A, *, T)$  حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- (\*)  $(A, *)$  زمرة تبادلية.
- (\*)  $T$  تجميعي.
- (\*)  $T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$

### ملاحظات:

- (\*) إذا كان القانون  $T$  تبادلي. نقول إن الحلقة  $A$  تبادلية.
- (\*) إذا كان للقانون  $T$  عنصر محايد، نقول إن الحلقة  $A$  وحادية.
- (\*) نرسم عادة للقانون  $*$  ب "+" وللقانون  $T$  ب "×" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل  $*$  ب  $0$  أو  $0_A$  ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل  $T$  ب  $1$  أو  $1_A$ .

### (3) أمثلة:

- 1 كل من  $(\mathbb{C}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة تبادلية وحادية.
- 2  $(F(X, \mathbb{R}), +, \times)$  حلقة تبادلية وحادية.

### (4) خاصيات:

#### خاصية (1):

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة صفرها  $e$

لدينا:  $(\forall a \in A): aTe = eTa = e$

#### ملاحظة:

إذا رمزنا ل  $(A, *, T)$  ب  $(A, +, \times)$  الخاصية تصبح:

$$(\forall a \in A): a \times 0 = 0 \times a = 0$$

#### برهان:

لدينا:  $aT(e * e) = aTe$  (لأن  $e * e = e$ )

يعني:  $(aTe) * (aTe) = aTe$

يعني:  $(aTe) * (aTe) = (aTe) * e$

يعني:  $aTe = e$  (لأن  $(A, *)$  زمرة)

لدينا:  $aTe = e$

وبنفس الطريقة نبين أن  $eTa = e$

ومنه  $eTa = aTe = e$

#### خاصية (2):

لتكن  $(A, *, T)$  صفرها  $e$

نرمز ل  $a'$  لمماثل  $a$  في  $(A, *)$ .

لدينا:  $(\forall (a, b) \in A^2): aTb' = a'Tb = (aTb)'$

#### ملاحظة:

إذا رمزنا ل  $(A, *, T)$  ب  $(A, +, \times)$  الخاصية تصبح:

$$(\forall (a, b) \in A^2): a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

#### برهان:

لنبين أن:  $(aTb)' = aTb'$

يعني:  $(aTb) * (aTb') = e$  (لأن  $*$  تبادلي).

لدينا:  $f_a of_b = f_{ab}$

لدينا:  $\begin{cases} a \in G \\ b \in G \end{cases}$  إذن  $ab \in G$

لدينا  $f_{ab} \in F$

وبالتالي  $(\forall (f_a, f_b) \in F^2): f_a of_b \in F$

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في  $F$ .

(b) لنبين أن  $h$  تشاكل شمولي من  $(G, .)$  نحو  $(F, o)$ .

← ليكن  $a$  و  $b$  من  $G$ . لنبين أن:  $h(a.b) = h(a)oh(b)$

لدينا:  $h(a.b) = f_{ab} = f_a of_b = h(a)oh(b)$

لدينا  $h$  تشاكل.

← ولدينا  $h$  شمولي لأن كل عنصر  $f_a$  من  $F$  له سابق على الأقل  $a$  من  $G$ .

ومنه  $h$  تشاكل شمولي من  $(G, .)$  نحو  $(F, o)$ .

(\*) لنبين أن  $(F, o)$  زمرة.

- لدينا  $(G, .)$  زمرة.

- و  $h$  تشاكل شمولي من  $(G, .)$  نحو  $(F, o)$ .

لدينا  $(F, o)$  زمرة.

### (V) الحلقة:

#### (1) توزيعية قانون بالنسبة لآخر.

#### تعريف:

لتكن  $E$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$ .

نقول إن  $T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y, z) \in E^3) xT(y * z) = (xTy) * (xTz) \quad (1)$$

$$(x * y)Tz = (xTz) * (yTz) \quad (2)$$

#### ملاحظة:

(\*) إذا كان القانون  $T$  تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.

(\*) إذا تحققت الخاصية (1) نقول إن  $T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$  على اليمين.

#### أمثلة:

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ .

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x + (y \times z) \neq (x + y) \times (x + z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. والتقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في

$P(E)$ .

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في  $F(X, \mathbb{R})$

- لدينا:

$$(aTb)*(aTb') = aT(b*b') \\ = aTe \\ = e$$

$$(aTb)' = aTb' \quad \text{إن}$$

$$(aTb)' = a'Tb \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

(5) العناصر القابلة للمماثلة:

تعريف:

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة واحدة وحدتها  $e$ .

نقول إن عنصرا  $a$  من  $A$  قابل للمماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثل بالنسبة للقانون  $T$  في  $A$ .

خاصية:

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة واحدة وحدتها  $e$ .

ولتكن  $U$  مجموعة العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا:  $(U, T)$  زمرة.

برهان:

- لدينا  $U \neq \emptyset$  لأن  $e \in U$ .

- لنبين أن  $T$  قانون تركيب داخلي في  $U$ .

ليكن  $x, y \in U$  من  $U$  لنبين أن  $(xTy) \in U$ .

لدينا  $x, y \in U$  من  $U$  إن يقبلان مماثلين  $x''$  و  $y''$  في  $(A, T)$ .

إن  $xTy$  له مماثل هو  $y''Tx''$ .

إن  $xTy \in U$ .

ومنه  $T$  قانون تركيب داخلي في  $U$ .

- لدينا  $T$  تجميعي في  $A$ . إن تجميعي في  $U$ .

- لدينا:  $(\forall a \in U): \varepsilon Ta = aT\varepsilon = a$

و  $e \in U$

إن  $e$  هو العنصر المحايد في  $U$ .

- ليكن  $x \in U$  لنبين أنه يقبل مماثلا  $x''$  في  $(U, T)$ .

لدينا  $x \in U$  إن يقبل مماثلا  $x''$  في  $(A, T)$ .

ولدينا  $x''$  يقبل مماثلا هو  $x$  إن  $x'' \in U$

إن  $x$  يقبل مماثلا هو  $x''$  في  $(U, T)$ .

وبالتالي  $(U, T)$  زمرة.

(6) قواسم الصفر في حلقة:

مثال:

نعتبر الحلقة  $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$  صفرها:  $\theta: x \rightarrow 0$

ونعتبر الدالتين:  $f: x \rightarrow |x| - x$

و:  $g: x \rightarrow |x| + x$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}): (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$= (|x| - x)(|x| + x)$$

$$= |x|^2 - x^2$$

$$= x^2 - x^2 = 0 = \theta(x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f.g = \theta \quad \text{إن:}$$

$$f \neq \theta, \quad g \neq \theta, \quad f.g = \theta$$

نقول إن  $f$  و  $g$  قاسمين للصفر في الحلقة  $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ .

تعريف (1):

ليكن  $(A, *, T)$  حلقة صفرها  $0_A$

نقول إن عنصرا  $a$  من  $A$  قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان:

$$aTb = 0_A \quad \text{حيث: } b \neq 0_A$$

تعريف (2):

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة

نقول إن الحلقة  $(A, *, T)$  كاملة (intègre) إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

ملاحظة:

نعتبر الحلقة  $(A, +, \times)$  صفرها  $0_A$ .

1- يكون  $a$  قاسم للصفر إذا كان:

$$a \times b = 0_A \quad \text{حيث } b \neq 0_A$$

2- تكون  $(A, *, T)$  كاملة إذا وفق إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in A^2) \begin{cases} x \neq 0_A \\ y \neq 0_A \end{cases} \Rightarrow x.y \neq 0_A$$

يعني:

$$(\forall (x, y) \in A^2) x.y = 0_A \Rightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{أو} \\ y = 0_A \end{cases}$$

أمثلة:

1- كل من  $(\mathbb{C}, +, \times); (\mathbb{R}, +, \times); (\mathbb{Q}, +, \times); (\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة كاملة.

2-  $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$  حلقة غير كاملة.

(7) حلقتان هامتان:

(a) حلقة المصفوفات المربعة:

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 2:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{حيث } d, c, b, a \text{ من } \mathbb{R}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب  $M_2(\mathbb{R})$

- نعرف على  $M_2(\mathbb{R})$  الجمع والضرب كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad (\leftarrow)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix} \quad (\leftarrow)$$

### خاصية:

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة غير تبادلية وواحدية.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ صفرها المصفوفة المنعدمة:}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وحدتها المصفوفة الوحدة: وغير كاملة.}$$

### ← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 3:

#### تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 3 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ  $M_3(\mathbb{R})$

- نعرف الجمع والضرب في  $M_3(\mathbb{R})$  بما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

باستعمال الترميز يمكن أن نعرف الجمع والضرب كما يلي:  
نعتبر المصفوفة:

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} ; \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

(\* لدينا  $A+B$  هي المصفوفة  $S = (S_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

$$S_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ حيث:}$$

(\* ولدينا  $A.B$  هي المصفوفة  $C = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} \text{ حيث}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

### خاصية:

$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة غير تبادلية، غير كاملة وواحدية صفرها المصفوفة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وحدتها } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ المنعدمة:}$$

### (b) الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ :

سبق وأن عرفنا الجمع والضرب في  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  كما يلي:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

### خاصية:

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة تبادلية واحدية صفرها  $\overline{0}$  وحدتها  $\overline{1}$ .

#### ملاحظة:

(\* نعتبر  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  لدينا:

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$$

$$\overline{2} \neq \overline{0} \text{ و } \overline{3} \neq \overline{0}$$

و إذن  $\overline{2}$  و  $\overline{3}$  قاسمان للصفر.

إذن  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة غير كاملة.

(\* نعتبر  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حيث  $n$  أولي.

$$(\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x \cdot y} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow xy \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow n/xy$$

$$\Rightarrow n/x \text{ أو } n/y$$

$$\Rightarrow x \equiv 0[n] \text{ أو } y \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \overline{0} \text{ أو } \overline{y} = \overline{0}$$

إذن  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة كاملة.

(\* نعتبر الحلقة  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حيث  $n$  غير أولي.

إذن  $n$  يقبل قاسم فعلي موجب  $n_1$ .

$$n = n_1 + n_2 \text{ يعني:}$$

$n_1$  قاسم فعلي موجب إذن  $n_2$  قاسم فعلي موجب.

لدينا  $1 < n_1 < n$  إذن  $n \times n_1$  يعني  $n_1 \not\equiv 0[n]$

و  $1 < n_2 < n$  و  $n \times n_2$  و  $n_2 \not\equiv 0[n]$

يعني:  $\overline{n_1} \neq \overline{0}$  و  $\overline{n_2} \neq \overline{0}$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n} \text{ ولدينا:}$$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n} \text{ يعني:}$$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{0} \text{ يعني:}$$

إذن  $\overline{n_1}$  و  $\overline{n_2}$  قاسمان للصفر.

ومنه:  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة غير كاملة.

### خاصية:

الحلقة  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  كاملة إذا وفقط إذا كان  $n$  أولي.

### تمرين:

نعتبر الحلقة  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ ،  $n \in \mathbb{N}^*$

حدد العناصر القابلة للمماثلة.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ - نعتبر المصفوفة}$$

لنتحقق هل  $A$  تقبل مقلوبا.

$$A.A' = A'.A = I \text{ : نبحث عن } A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$A.A' = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن  $A$  لا تقبل مقلوبا  $A'$ .

ومنه  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  ليس جسما.

وبنفس نجد أن  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  ليس جسما.

### (3) خاصيات:

#### خاصية (1):

ليكن  $(K, +, \times)$  جسما.

لدينا كل عنصر من  $K - \{0_k\}$  منتظم بالنسبة للضرب.

$$(\forall a \in K - \{0_k\})(\forall (x, y) \in K^2): \text{ يعني:}$$

$$\begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

#### خاصية (2):

ليكن  $(K, +, \times)$  جسما.

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in K^2): x.y = 0_k \Rightarrow x = 0_k \text{ أو } y = 0_k$$

استنتاج: كل جسم هو حلقة كاملة.

#### خاصية (3):

ليكن  $(K, +, \times)$  جسما.

نعتبر المعادلة  $a \times x = b$

(\* إذا كان  $a \neq 0_k$  فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا  $x = a^{-1}b$ .

(\* إذا كان  $a = 0_k$  و  $b \neq 0_k$  فإن المعادلة ليس لها حل.

(\* إذا كان  $a = 0_k$  و  $b = 0_k$  فإن  $S = K$

نفس الشيء بالنسبة للمعادلة  $x \times a = b$ .

- لدينا:

$$(\bar{x} \text{ قابلة للمماثلة}) \Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}): \bar{x}.x' = \bar{1}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}): x.x' \equiv 1[n]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}): xx' = 1 + nk$$

$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}): xx' - nk = 1$$

$$\Leftrightarrow x \wedge n = 1$$

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا هي:

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / x \wedge n = 1\}$$

**ملاحظة:**

لدينا  $(U, \times)$  زمرة تبادلية.

## (VI) الجسم: Corps

### (1) تعريف:

لنكن  $k$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$ .

نقول إن  $(K, *, T)$  جسم إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$(K, *, T)$  حلقة واحدة.

$*$  كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مائلا بالنسبة ل  $T$ .

### ملاحظة:

1- إذا كان القانون  $T$  تبادلي نقول إن الجسم  $K$  تبادلي.

2- يكون  $(K, *, T)$  جسما إذا وفقط إذا كان:

$(K, *)$  زمرة.

$(K - \{0_k\}, T)$  زمرة.

$T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$ .

### (2) أمثلة:

1- كل من  $(\mathbb{C}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \times)$  جسم تبادلي.

2- نعتبر الحلقة  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$  حيث  $p$  أولي.

لنبين أنها جسم.

- لدينا  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$  حلقة واحدة.

- ليكن  $\bar{x} \neq \bar{0}$

يعني  $x \neq 0[p]$  يعني  $p \times x$

وبما أن  $p$  أولي فإن  $p \wedge x = 1$

إذن حسب Bezout يوجد  $U$  و  $V$  بحيث:

$$pu + xv = 1$$

$$\bar{p}.\bar{u} + \bar{x}.\bar{v} = \bar{1} \text{ يعني:}$$

$$\bar{x}.\bar{v} = \bar{1} \text{ يعني:}$$

إذن  $\bar{x}$  يقبل مائلا هو  $\bar{v}$ .

إذن كل عنصر  $\bar{x} \neq \bar{0}$  يقبل مقلوبا.

ومنه  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$  جسم.

### خاصية:

إذا كان  $p$  أولي فإن  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$  جسم تبادلي.

3- نعتبر الحلقة  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

- لدينا  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة.

## تمارين تطبيقية:

### تمرين (1):

$$L = \left\{ \begin{array}{l} f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow ax / a \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ نعتبر:}$$

بين أن:  $(L, +, 0)$  جسم تبادلي.

### تمرين (2):

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ نعتبر}$$

بين أن  $(E, +, \times)$  جسم تبادلي.