# البنيات الجبرية

## 1) قانون التركيب الداخلي:

**قانون تركيب داخلي**

لتكن $E$ مجموعة
كل تطبيق $f$ من $E\times E$ نحو $E$ يسمى قانون تركيب داخلي في $E$

$$\begin{array}{cccc} f: & E\times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

غالبا ما نرمز ل $f(x,y)$ ب : $x*y$ أو $x\mathrm{T}y$ أو $x\perp y$
ونقول إن المجموعة $E$ مزودة بقانون التركيب الداخلي $*$ و نكتب $(E,*)$

**جزء مستقر**

لتكن $E$ مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و ليكن $S$ جزءا من $E$
نقول إن $S$ جزء مستقر من $(E,*)$ إذا كان : $x*y\in S \quad \left(\forall(x,y)\in S^2\right)$

**خاصيات قوانين التركيب الداخلية**

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في $E$
- $*$ تجميعي في $E$ $\Leftrightarrow$ $x*(y*z)=(x*y)*z \quad \left(\forall(x,y,z)\in E^3\right)$
- $*$ تبادلي في $E$ $\Leftrightarrow$ $x*y=y*x \quad \left(\forall(x,y)\in E^2\right)$

**العنصر المحايد**

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في $E$ و $e\in E$
- ✓ $e$ عنصر محايد في $E$ بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ $x*e=x$ و $e*x=x \quad (\forall x\in E)$
- ✓ إذا كان للقانون $*$ عنصرا محايدا فإنه وحيد

**العنصر المماثل**

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في $E$ بحيث $*$ يقبل عنصرا محايدا $e$ و ليكن $x\in E$
- ✓ $x$ يقبل مماثلا في بالنسبة للقانون $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر $x'$ من $E$ بحيث : $x*x'=x'*x=e$
- ✓ بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي فإن $x'$ وحيد
- ✓ بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي و كان $x'$ ماثل $x$ و $y'$ مماثل $y$ فإن $(x*y)'=y'*x'$

## العنصر المنتظم

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في $E$ . نقول إن عنصرا $a$ من $E$ منتظم إذا وفقط إذا كان :

$$\left(\forall(x,y)\in E^2\right)\quad \begin{cases} a*x=a*y\Rightarrow x=y \\ x*a=y*a\Rightarrow x=y \end{cases}$$

## 2) التشاكل:

- ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في $E$ و $\top$ قانون تركيب داخلي في $F$
نسمي تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ كل تطبيق $f:E\to F$ يحقق :
$$\left(\forall(x,y)\in E^2\right)\quad f(x*y)=f(x)\top f(y)$$
- إذا كان $f$ تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإن $f(E)$ جزء مستقر من $(F,\top)$
- إذا كان $f$ تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ و $*$ تجميعي في $E$ فإن $\top$ تجميعي في $f(E)$
- إذا كان $f$ تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ و $*$ تبادلي في $E$ فإن $\top$ تبادلي في $f(E)$
- إذا كان $e$ عنصر محايد في $(E,*)$ فإن $f(e)$ عنصر محايد في $(f(E),\top)$
- إذا كان $x'$ مماثل $x$ في $(E,*)$ فإن $(f(x))'=f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$

## 3) الزمرة :

لتكن $G$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$
نقول إن $(G,*)$ زمرة إذا وفقط إذا كان :

- $*$ تجميعي في $G$
- $*$ يقبل عنصرا محايدا
- كل عنصر من $G$ يقبل مماثلا

بالإضافة إذا كان القانون $*$ تبادلي فإننا نقول أن $(G,*)$ زمرة تبادلية

- لتكن $(G,*)$ زمرة
  - كل عنصر $a$ من $G$ منتظم
  - ليكن $a$ و $b$ من $G$ : كل من المعادلتين $a*x=b$ و $x*a=b$ تقبل حلا وحيدا في $G$

## زمرة جزئية

لتكن $(G,*)$ زمرة و $H$ جزء مستقر من $(G,*)$

- $(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان $(H,*)$ زمرة

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد $e$ و لتكن $H$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ ، لدينا :

- $H \neq \varnothing$
- $e$ هو العنصر المحايد في $H$
- إذا كان $x \in H$ و $x'$ مماثل $x$ في $G$ فإن $x' \in H$
- $x * y' \in H \quad \left(\forall (x,y) \in H^2\right)$ حيث $y'$ مماثل $y$ في $G$

لتكن $(G,*)$ زمرة و $H$ جزء من $G$ . تكون $H$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان :

- $H \neq \varnothing$
- $x * y' \in H \quad \left(\forall (x,y) \in H^2\right)$ حيث $y'$ مماثل $y$ في $G$

## تشاكل الزمر

لتكن $(G,*)$ زمرة و لتكن $E$ مزودة بقانون تركيب داخلي $\mathrm{T}$ و $f : (G,*) \to (E,\mathrm{T})$ تشاكل لدينا ما يلي :

- $\left(f(G),\mathrm{T}\right)$ زمرة
- إذا كانت $(G,*)$ زمرة تبادلية فإن $\left(f(G),\mathrm{T}\right)$ زمرة تبادلية
- إذا كان $f$ تشاكل شمولي ، فإن $f(G) = E$ و منه $(E,\mathrm{T})$ زمرة.

## 4) الحلقة :

## توزيعية قانون بالنسبة لآخر

لتكن $E$ مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و $\mathrm{T}$
نقول أن $\mathrm{T}$ توزيعي بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا كان :

- $x\mathrm{T}(y * z) = (x\mathrm{T}y) * (x\mathrm{T}z) \quad \left(\forall (x,y,z) \in E^3\right)$
- $(x * y)\mathrm{T}z = (x\mathrm{T}z) * (y\mathrm{T}z) \quad \left(\forall (x,y,z) \in E^3\right)$

## الحلقة

لتكن $A$ مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و $\mathrm{T}$
نقول أن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة إذا وفقط إذا كان :

- $(A,*)$ زمرة تبادلية
- $\mathrm{T}$ تجميعي
- $\mathrm{T}$ توزيعي بالنسبة ل $*$

✓ بالإضافة إذا كان القانون $\mathrm{T}$ تبادلي نقول إن الحلقة $A$ تبادلية
✓ بالإضافة إذا كان للقانون $\mathrm{T}$ عنصر محايد ، نقول إن الحلقة $A$ واحدية.

- لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها $e$ ، لدينا : $aTe=eTa=e \quad (\forall a\in A)$
- لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها $e$ و نرمز ب $a'$ مماثل $a$ في $(A,*)$، لدينا :
$$(\forall(a,b)\in A^2)\quad aTb'=a'Tb=(aTb)'$$

## العناصر القابلة للماثلة

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة حلقة واحدية وحدتها $\varepsilon$
نقول إن عنصرا $a$ من $A$ قابلا للماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثلا بالنسبة للقانون $\mathrm{T}$ في $A$

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة حلقة واحدية وحدتها $\varepsilon$ و لتكن $U$ مجموعة العناصر لقابلة للماثلة ، لدينا : $(U,\mathrm{T})$ زمرة

## قواسم الصفر في حلقة

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها $0_A$
نقول إن عنصرا $a$ من $A$ قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان : $a\neq 0_A$ و يوجد $b\neq 0_A$ بحيث : $aTb=0_A$

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة
نقول إن الحلقة $(A,*,\mathrm{T})$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر

## 5) الجسم :

لتكن $K$ مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و $\mathrm{T}$
نقول إن $(K,*,\mathrm{T})$ جسم إذا وفقط إذا كان :
- $(K,*,\mathrm{T})$ حلقة واحدية
- كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل $\mathrm{T}$

ليكن $(K,+,\times)$ جسما
لدينا كل عنصر من $K-\{0_A\}$ منتظم بالنسبة للضرب . يعني :
$$(\forall a\in K-\{0_A\})(\forall(x,y)\in K^2):\begin{cases}a.x=a.y\Rightarrow x=y\\ x.a=y.a\Rightarrow x=y\end{cases}$$

ليكن $(K,+,\times)$ جسما. لدينا :
$$(\forall(x,y)\in K^2):x.y=0_K\Rightarrow x=0_K \text{ أو } y=0_K$$
- كل جسم هو حلقة كاملة

**ليكن** $(K,+,\times)$ **جسما . نعتبر المعادلة** $a\times x=b$

- **إذا كان** $a\neq 0_K$ **فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا** $x=a^{-1}b$
- **إذا كان** $a=0_K$ **و** $b\neq 0_K$ **فإن المعادلة ليس لها حلا**
- **إذا كان** $a=0_K$ **و** $b=0_K$ **فإن** $S=K$