استدراكية 2008

نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2) \quad x*y = x+y-3xy$$

1) أـ تحقق أن $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

بـ بين أن $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية

2) أـ نعتبر التطبيق
$$\varphi\ \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}^*$$
$$x \to \varphi(x)=1-3x$$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

بـ بين أن $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{+*})=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

جـ بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية من $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$

3) ليكن x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عدد طبيعي من $\mathbb{N}$.

نضع : $x^{(0)}=0$ و $x^{(n+1)}=x^{(n)}*x \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

أـ بين أن :
$$\left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)(\forall n\in\mathbb{N}) \quad \varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$$

بـ استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n

4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي T المعرف بما يلي : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2) \quad x\mathrm{T}y=x+y-\frac{1}{3}$

أـ بين أن $(\mathbb{R},\mathrm{T})$ زمرة تبادلية

بـ بين أن $(\mathbb{R},*,\mathrm{T})$ جسم غير تبادلي

2009 العادية

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

. ونعتبر المجموعة F للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

1) أـ بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

بـ بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية

2) لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من F حيث أن $x\in\mathbb{R}^*$. بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$

3) نضع $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

نزود E بقانون تركيب داخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall ((x,y),(a,b))\in E^2)\ (x,y)\perp(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$$

ونعتبر التطبيق :
$$\varphi:\ (F,\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to(x,y)$$

أـ أحسب $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$

بـ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي

جـ استنتج بنية $(E,\perp)$

استدراكية 2009

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

و $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

و لتكن V مجموعة المصفوفات والتي تكتب على $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) بين أن $(V,+,\cdot)$ فضاء حقيقي محددا بعده

2) أـ بين أن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

بـ بنية $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية

3) أـ أحسب $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}$

بـ هل $(V,+,\times)$ جسم ؟

4) لتكن X مصفوفة من V حيث :

$X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

أـ بين أن $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ حيث O هي المصفوفة المنعدمة

بـ نفترض أن $a^2-4b^2\neq 0$ بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده

تمرين

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e و نرمز ب a^{-1} لماثل a في $(G,*)$ و ليكن f_a التطبيق المعرف من G نحو G بما يلي : $(\forall x\in G) \quad f_a(x)=a*x*a^{-1}$

1) بين أن f_a تشاكل من $(G,*)$ نحو $(G,*)$

2) لتكن F مجموعة التطبيقات f_a ; $a\in G$.

بين أن $(F,\circ)$ زمرة