

تمرين رقم 1

(1) بين أن الدالة $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

(2) نعتبر القانون T المعرفة بما يلي : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) aTb = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$

أ- بين أن f تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (\mathbb{R}, T)

ب- استنتج بنية (\mathbb{R}, T)

تمرين رقم 2

(1) بين أن $(\forall x > 0)(\forall y > 0) e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

(2) نعرف على $I =]0, +\infty[$ القانون T المعرفة كما يلي : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) xTy = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$

و ليكن f تطبيق معرف من I نحو I بما يلي : $f(x) = \ln(1+x)$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من (I, \times) نحو (I, T)

ب- استنتج بنية (I, T)

تمرين رقم 3

ليكن a من \mathbb{R}^* و نعتبر التطبيق f_a المعرفة من \mathbb{R}^2 نحو \mathbb{R}^2 ب : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) : f_a((x,y)) = \left(ax, \frac{y}{a}\right)$

(1) بين أن f_a تقابل من \mathbb{R}^2 نحو \mathbb{R}^2

(2) نعتبر المجموعة $E = \{f_a / a \in \mathbb{R}^*\}$ حدد التطبيق $f_a \circ f_b$ لكل (a,b) من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ أستج أن قانون داخلي في E

(3) ليكن h التطبيق المعرفة من \mathbb{R}^* نحو E بما يلي : $(\forall a \in \mathbb{R}^*) h(a) = f_a$

أ- بين أن h تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \circ)

ب- استنتج بنية (E, \circ) و حدد عنصرها المحايد

تمرين رقم 4

نعتبر في حلقة المصفوفات $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ المجموعة $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ a e^a & e^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

(1) بين أن (E, \times) جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

(2) نعتبر التطبيق φ المعرفة بما يلي : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow E$
 $x \rightarrow M_x$

أ- بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ إلى (E, \times)

ب- استنتج بنية (E, \times)

ج- بين أن كل مصفوفة M_a من E تقبل مقلوبا M_a^{-1} ثم حدد M_a^{-1}

(3) نضع $F = \{M_p \in E / p \in \mathbb{Z}\}$

أ- بين أن (F, \times) زمرة جزئية من الزمرة (E, \times)

ب- بين أن $M_p^n = M_{np}$ لكل n, p من \mathbb{Z}

ج- ليكن a, b عددين من \mathbb{Z} و نضع $H = \{M_a^n \times M_b^m / (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$

(1ج) بين أن (H, \times) زمرة جزئية من الزمرة (F, \times)

(2ج) ليكن c عدد من \mathbb{Z} بين أن : $M_c \in H \Leftrightarrow a \wedge b | c$

(3ج) بين أن $H = F \Leftrightarrow a \wedge b = 1$

$$\left[(\forall (x,y) \in E^2) : f(x * y) = f(x) T f(y) \right] \Leftrightarrow \left[f \text{ تشاكل من } (E, *) \text{ نحو } (F, T) \right]$$