قانون التركيب الداخلي

تمرين 1

نعتبر قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2 \quad x*y = xy - 3(x+y) + 12$$

1- بين أن : $*$ تجميعي و تبادلي

2- بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا ثم حدده

3- حدد عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

4- بين أن : $E =]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

5- بين أن : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

الحل

1- لنبين أن : $*$ تجميعي

نعتبر : $(x;y;z)\in \mathbb{R}^3$

$$(x*y)*z = (xy-3(x+y)+12)z - 3((xy-3(x+y)+12)+z)+12$$

$$(x*y)*z = xyz - 3(xz+yz+xy) + 9(x+y+z) - 24$$

إذن : $\boxed{(x*y)*z = x*(y*z)}$

و منه : $*$ تجميعي

- لنبين أن : $*$ تبادلي

نعتبر : $(x;y)\in \mathbb{R}^2$

لدينا :

$$x*y = xy - 3(x+y) + 12$$
$$= yx - 3(y+x) + 12$$

إذن : $\boxed{x*y = y*x}$

2- لنبين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e\in\mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad x*e = e*x = x$$

بما أن $*$ تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e = x$

$$x*e = x \Leftrightarrow xe - 3(x+e) + 12 = x$$
$$\Leftrightarrow (e-4)(x-3) = 0 \ ; \ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e-4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{e=4}$$

إذن : $*$ يقبل عنصرا محايدا و هو 4

3- عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

نعتبر : $x\in\mathbb{R}$

y مماثل ل x يعني : $x*y = y*x = 4$

بما أن $*$ تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x*y = 4$

$$x*y = 4 \Leftrightarrow xy - 3(x+y) + 12 = 4$$
$$\Leftrightarrow y(x-3) = 3x - 9$$

$$\boxed{x*y = e \Leftrightarrow y = \frac{3x-9}{x-3} \ ; \ x\neq 3}$$

مجموعة عناصر $\mathbb{R}$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$

هي : $\mathbb{R}-\{3\}$

4- لنبين أن : $E =]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

نعتبر : $y\in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x) = xy - 3(x+y) + 12$

معرفة على $[3;+\infty[$

$$f_y'(x) = y - 3$$

بما أن : $y\in E$ فإن : $\forall x\in[3;+\infty[: f_y'(x) > 0$

إذن : f_y تزايدية على $[3;+\infty[$

و منه : $f_y(x) \geq f_y(3) \quad \forall x\in E$ و $f_y(3) = 4$

إذن : $f_y(x) > 3 \quad \forall x\in E$

و منه : $f_y(x) > 3 \quad \forall (x;y)\in E^2$

يعني : $\boxed{\forall (x;y)\in E^2 \quad x*y\in E}$

إذن : $E =]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R};*)$

5- لنبين أن : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

العنصر a من $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظم يعني

$$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} a*x = a*y \Rightarrow x = y \\ x*a = y*a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

بما أن $*$ تبادلي يكفي البرهنة أن :

$$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad a*x = a*y \Rightarrow x = y$$

$$a*x = a*y \Leftrightarrow ax - 3(a+x) + 12 = ay - 3(a+y) + 12$$
$$\Leftrightarrow ax - 3x = ay - 3y$$
$$\Leftrightarrow (a-3)(x-y) = 0 \ ; \ a\neq 3$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

و منه : جميع عناصر $\mathbb{R}-\{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون $*$

تمرين 2

1- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ تجميعي

2- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

4- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

5- بين أن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

الحل

2- لنبين أن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

لدينا :

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

إذن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

لدينا : $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

و : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

4- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+b&c+d\\a+b&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\a+b=0\end{cases};\begin{cases}c+d=1\\c+d=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 1=0$$

و هذا غير ممكن

إذن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

5- لنبين أن : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

لدينا : $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$

لكن : $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

تمرين3

1- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ تجميعي

2- بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- بين أن: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

4- بين أن : $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ لايقبل مماثلا في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

5- بين أن : $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ غير منتظم في $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

تمرين4

بين أن f تشاكل في كل حالة

-1
$$f:(]0;+\infty[;\times)\to(\mathbb{R};+)$$
$$x\mapsto \ln x$$

-2
$$f:(\mathbb{R};+)\to(\mathbb{C}^*;\times)$$
$$x\mapsto e^{ix}$$

-3
$$f:(\mathscr{P}(E);\cup)\to(\mathscr{P}(E);\cap)$$
$$X\mapsto C_E^X$$

-4
$$f:(\mathscr{P}(E);\cap)\to(\mathscr{P}(E);\cup)$$
$$X\mapsto C_E^X$$

-5
$$f:(\mathbb{R};+)\to(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}$$

احسب : $\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}^n$

الحل

-1
$$f:(]0;+\infty[;\times)\to(\mathbb{R};+)$$
$$x\mapsto \ln x$$

نعتبر : $(x;y)\in\,]0;+\infty[^2$

$$f(xy)=\ln(xy)$$
$$=\ln x+\ln y$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

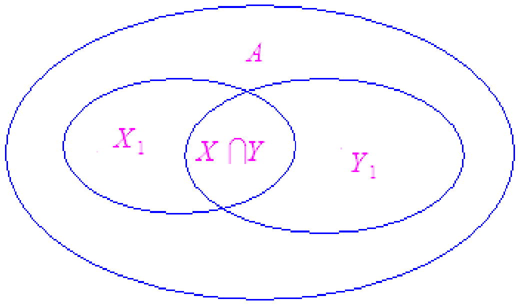
إذن : f تشاكل من $(]0;+\infty[;\times)$ نحو $(\mathbb{R};+)$

-3
$$f:(\mathscr{P}(E);\cup)\to(\mathscr{P}(E);\cap)$$
$$X\mapsto C_E^X$$

نعتبر : $(X;Y)\in\mathscr{P}(E)^2$

$$f(X\cup Y)=C_E^{X\cup Y}$$
$$=E-(X\cup Y)$$
$$=(E-X)\cap(E-Y)$$
$$=C_E^X\cap C_E^Y$$
$$f(X\cup Y)=f(X)\cap f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathscr{P}(E);\cup)$ نحو $(\mathscr{P}(E);\cap)$



$$E-(X\cup Y)=A$$
$$E-X=A\cup Y_1$$
$$E-Y=A\cup X_1$$
$$(A\cup Y_1)\cap(A\cup X_1)=A$$

إذن : $\boxed{E-(X\cup Y)=(E-X)\cap(E-Y)}$

-4 $$f:(\mathscr{P}(E);\cap)\to(\mathscr{P}(E);\cup)$$
$$X\mapsto C_E^X$$

نعتبر : $(X;Y)\in\mathscr{P}(E)^2$

$$f(X\cap Y)=C_E^{X\cap Y}$$
$$=E-(X\cap Y)$$
$$=(E-X)\cup(E-Y)$$
$$=C_E^X\cup C_E^Y$$
$$f(X\cap Y)=f(X)\cup f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathscr{P}(E);\cap)$ نحو $(\mathscr{P}(E);\cup)$

-5 $$f:(\mathbb{R};+)\to(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}$$
$$\boxed{f(x+y)=f(x)\times f(y)}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

من : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx)=(f(x))^n$

إذن : $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$

تمرين5

* قانون تركيب داخلي في G بحيث :

* تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا e ، جميع عناصر G تقبل مماثلا في $(G;*)$ (مماثل a هو a^{-1})

نعتبر التطبيق : $f:G\to\mathscr{F}$ ، $a\mapsto f_a$

f_a معرف بما يلي : $f_a:G\to G$ ، $x\mapsto a*x*a^{-1}$

-1 بين أن : $\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

-2 نعتبر : $F=\{f_a\ /a\in G\}$

أ – بين أن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا ، جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

ب- بين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

الحل

-1 لنبين أن : $\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

نعتبر : $x\in G$

$$f_a\circ f_b(x)=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$$

بما أن : $*$ تجميعي و $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

فإن : $a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}=(a*b)*x*(a*b)^{-1}$

إذن : $\forall x\in G\quad f_a\circ f_b(x)=f_{a*b}(x)$

و منه : $\boxed{\forall(a;b)\in G^2\ f_a\circ f_b=f_{a*b}}$

-2 نعتبر : $F=\{f_a\ /a\in G\}$

أ – لنبين أن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F

من -1 : $\forall(a;b)\in G^2\quad f_a\circ f_b=f_{a*b}$

وبما أن : $*$ قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a*b\in G$

إذن : $f_{a*b}\in F$

و منه : $f_a\circ f_b\in F$

إذن : $\circ$ قانون تركيب داخلي في F

– لنبين أن : $\circ$ تجميعي

نعتبر : $(a;b;c)\in G^3$

بما أن : $*$ قانون تركيب داخلي في G

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

$$\begin{aligned}(f_a\circ f_b)\circ f_c &= f_{a*b}\circ f_c\\ &= f_{(a*b)*c}\\ &= f_{a*(b*c)}\\ &= f_a\circ f_{(b*c)}\end{aligned}$$

$$\boxed{(f_a\circ f_b)\circ f_c = f_a\circ(f_b\circ f_c)}$$

إذن : $\circ$ تجميعي في F

– لنبين أن : $\circ$ يقبل عنصرا محايدا

نعتبر : $a\in G$

لدينا : $f_a\circ f_e=f_{a*e}=f_a$ و $f_e\circ f_a=f_{e*a}=f_a$

إذن : $\circ$ يقبل عنصرا محايدا و هو f_e

– لنبين أن : جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

نعتبر : $a\in G$ و $a^{-1}\in G$ مماثل a

لدينا : $f_a\circ f_{a^{-1}}=f_{a*a^{-1}}=f_e$ و $f_{a^{-1}}\circ f_a=f_{a^{-1}*a}=f_e$

إذن : مماثل f_a هو $f_{a^{-1}}$

و منه : جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F;\circ)$

ب- بين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

نعتبر : $(a;b)\in G^2$

لدينا : $f(a*b)=f_{a*b}$

إذن : $f(a*b)=f_a\circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

تمرين 6

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \;/\; (a;b)\in\mathbb{R}^2;(a;b)\neq(0;0)\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f:\quad E\to\mathbb{C}^*$$
$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\mapsto a+ib$$

1 - بين أن : f تقابل

2- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

3- استنتج خاصيات $(E;\times)$

الحل

1 - لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c+id\in\mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in E$ بحيث : $f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right)=c+id\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$$

إذن : f شمولي (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

2- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad)\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}$$
$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\right)=(a+bi)(c+di)}$$

إذن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

3- استنتج خاصيات $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

فإن : f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{C}^*;\times)$ نحو من $(E;\times)$

و بما أن : $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{C}^*$

$\times$ تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا 1 ، جميع عناصر $\mathbb{C}^*$ تقبل مماثلا في $(\mathbb{C}^*;\times)$

(مماثل $a+ib$ هو $\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$)

فإن : $\times$ قانون تركيب داخلي في E

$\times$ تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا $f^{-1}(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ،

جميع عناصر E تقبل مماثلا في $(E;\times)$

(مماثل $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix}\frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2}\\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$)